O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI MADANIYAT VA SPORT ISHLARI VAZIRLIGI

O‘ZBEKISTON DAVLAT JISMONIY TARBIYA INSTITUTI

SPORTDA MATEMATIKA

FANIDAN

O’QUV-USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi:	100 000 – Gumanitar 200 000 – Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq 600 000 – Xizmatlar
Ta’lim sohasi:	110 000 – Pedagogika 210 000 – Sotsiologiya va psixologiya 610 000 – Xizmat ko’rsatish
Ta’lim yo’nalishi:	5111000 – Kasb ta’ lim 5610500 - Sport faoliyati (faoliyat turlari bo’yicha) 5210200 – Psixologiya (sport)

TOSHKENT

Fanning O`quv-uslubiy majmuasi O`zbekiston davlat jismoniy tarbiya institutida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

Vafoyev B.R.	–	“Informatika va axborot texnologiyalari” kafedrasi mudiri, i.f.n.
Kazoqov R.T.	–	“Informatika va axborot texnologiyalari” kafedrasi katta o`qituvchisi
Rajabov Sh.B.	–	“Informatika va axborot texnologiyalari” kafedrasi o`qituvchisi

Fanning O`quv-uslubiy majmuasi O`zbekiston davlat jismoniy tarbiya instituti Ilmiy-uslubiy kengashida muhokama etilgan va foydalanish uchun tavsiya qilingan (201__ yil “___” ________ dagi “___” -sonli bayonnoma).

MUNDARIJA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Ro`yxatga olindi:
№ BD – 5610500 – 2.01
201 6 yil "08" 08

Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi

201_ yil "__" 08

SPORTDA MATEMATIKA
FAN DASTURI

Bilim sohasi:	100 000 – Gumanitar 200 000 – Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq 600 000 – Xizmatlar
Ta'lim sohasi:	110 000 – Pedagogika 210 000 – Sotsiologiya va psixologiya 610 000 – Xizmat ko'rsatish
Ta'lim yo'nalishi:	5111000 – Kasb ta'limi (5610500 Sport faoliyati (faoliyat turlari bo'yicha)) 5210200 – Psixologiya (sport) 5610500 – Sport faoliyati (faoliyat turlari bo'yicha)

Toshkent – 201 6

O`zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 201_6_ yil "_25_" ___08___ dagi "_355_"-sonli buyrug'ining _2_ -ilovasi bilan fan dasturi ro`yxati tasdiqlangan.

Fan dasturi Oliy va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi yo`nalishlari bo`yicha O`quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi Kengashining 201_6_ yil "_05_" ___08___ dagi _3_ - sonli bayonnomasi bilan ma'qullangan.

Fanning o'quv dasturi O'zbekiston davlat jismoniy tarbiya institutida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

Vafoyev B.R.	–	O`zDJTI, "Informatika va axborot texnologiyalari" kafedrasi mudiri, i.f.n.;
Tolametov A.A.	–	O`zDJTI, "Informatika va axborot texnologiyalari" kafedrasi dotsenti v.b.

Taqrizchilar:

Kerimov F.A.	–	O'zDJTI, "Jismoniy tarbiya nazariyasi va uslubiyati" kafedrasi professori, p.f.d.;
Haydarov A.	–	Mirzo Ulug'bek nomida O'zMU dotsenti, f.-m.f.n.

Fan dasturi O'zbekiston davlat jismoniy tarbiya instituti Kengashida ko'rib chiqilgan va tavsiya qilingan (201_6_ yil "_06_" ___07___ dagi "_12_" -sonli bayonnoma).

Fanning dolzarbligi

O`zbekiston Respublikasi o`z mustaqilligiga erishgan kundan so`nggi davr ichida ta`lim sohasida erishilgan eng noyob kashfiyotlardan biri Prezidentimiz I.A.Karimov tomonidan ishlab chiqilgan va ayni vaqtda izchillik bilan hayotga bosqichma-bosqich tatbiq etilayotgan “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”dir. Aynan ushbu dastur tufayli mamlakatimizda faoliyat ko`rsatib kelgan ta`lim tizimi ko`p bosqichli va uzluksiz ta`lim maktabiga aylandi.

Xalq xo`jaligining turli tarmoqlarida ishlab chiqarishni tashkil etish va boshqarish usullarini takomillashtirish turli matematik g`oya hamda usullarni qo`llanishini taqozo etadi. Matematika fan va texnika tili bo`lgani uchun har bir mutaxassisning ijodiy va amaliy faoliyatida muhim ahamiyatga egadir. Bundan tashqari hozirgi davrda hisoblash texnikasining turli vositalari insoniyat faoliyatini turli sohalarida keng ko`lamda ishlatilayotgani matematika fanining tatbiqlarini yanada kengaytirishga yo`l ochib bermoqda.

Oliy ta`lim muassasalari uchun matematikadan uzviylashtirilgan dastur mustaqil diyorimizning iqtisodiy, jismoniy, madaniy, ma`rifiy va ma`naviy rivojlanish dinamikasini talabalar ko`z oldida namoyon etish va ular ongiga singdirishga xizmat qiladi. O`zbekiston Respublikasining “Ta`lim to`g`risida”gi qonuni, Kadrlar tayyorlash milliy dasturi va Davlat ta`lim standartlari talablaridan kelib chiqqan holda “Sportda matematika” fanini o`qitishning umumiy maqsad va vazifalari aniqlanadi.

Oliy ta`limning Davlat ta`lim standartlariga ko`ra “Sportda matematika” fani jismoniy tarbiya va sportda matematik hisoblashlarni bajarish bo`yicha bilim, malaka va ko`nikmalarni tizimli shakllantirishga yo`naltirilgan.

Fanning o`quv rejadagi boshqa fanlar bilan o`zaro bog`liqligi va uslubiy jihatdan uzviyligi

“Sportda matematika” fani o`quv rejadagi “Sportda axborot kommunikatsiya texnologiyalari”, “Sport metrologiyasi” va “Harakat faoliyati biomexanikasi” fanlarini o`zlashtirishda asos bo`lib hisoblanadi. Shuningdek, umumkasbiy va mutaxassislik fanlarini o`zlashtirishda muhim ahamiyatga ega. Fanni o`rganishda akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida “Matematika” fanlari bo`yicha olingan nazariy va amaliy bilimlar zarur bo`lsa, o`z navbatida bu fandan olingan bilimlar talabalarning bitiruv malakaviy ishlari hamda magistrlik dissertatsiyalarini bajarish, ularda olingan natijalarni matematik-statistik tahlil qilishda bazaviy bilimlar vazifasini o`taydi.

Fanning jismoniy tarbiya va sport hamda ishlab chiqarishdagi o`rni

Mazkur fan jismoniy tarbiya va sport faoliyati mashg`ulotlarini to`g`ri taqsimlashda va matematik tahlil qilishda zarur bo`ladigan bilim, malaka va ko`nikmalarni shakllantirishda muhim ahamiyatga ega. Jumladan, bo`lajak o`qituvchi va murabbiylar sportchilarning jismoniy tayyorgarlik va natijalarning murakkab tomonlarini aniqlash yo`llarini, ularga ta`sir ko`rsatadigan turli omillarni baholash, o`qitish va mashq jarayonlarining sonli ma`lumotlarini aniqlash, hisob-kitob qilish va tahlil qilish malakasi va ko`nikmalarini egallashlari talab qilinadi.

Fanni o`qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar hamda o`quv mashg`ulotlarini loyihalash

O`quv jarayoni bilan bog`liq ta`lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada ta`lim berish, muammoli ma`ruzalar o`qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil etish, ilg`or pedagogik texnologiyalardan va multimedia vositalaridan foydalanish, talabalarni undaydigan, oylantiradigan muammolarni ular oldiga qoyish, talabalar bilan talabchanlik holatida individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

“Sportda matematika” fanini o`qitish jarayonida zamonaviy axborot texnologiyalari bilan jihozlangan ma`ruza xonasidan foydalaniladi. Yangi pedagogik texnologiyalar, ma`ruza materiallari, elektron o`quv qo`llanma va darsliklar hamda internet tarmog`idagi rasmiy ma`lumotlardan foydalaniladi.

Fan o`qituvchisi tomonidan pedagogik va modulli texnologiya tamoyillari asosida “Sportda matematika” fani o`quv mashg`ulotlarinig loyihalari ishlab chiqiladi.

Fan modulining dasturi (module syllabus)

<table>
<tr><td>O`quv kursining to`liq nomi:</td><td colspan="3">Sportda matematika</td></tr>
<tr><td>Kursni qisqacha nomi</td><td colspan="2">SM</td><td>Kod: SM</td></tr>
<tr><td>Kafedra:</td><td colspan="3">Informatika va axborot texnologiyalari</td></tr>
<tr><td>O`qituvchi haqida ma`lumot</td><td colspan="2">F.I.Sh</td><td>E-mail</td></tr>
<tr><td>Semestr va o`quv kursining davomiyligi</td><td colspan="3">2-semestrda 18 hafta</td></tr>
<tr><td rowspan="6">O`quv soatlar hajmi</b></td><td rowspan="2">Jami:<br>Shuningdek:</td><td>5610500 – Sport faoliyati (faoliyat turlari bo`yicha)
5210200 – Psixologiya (sport)</td><td>5111000 – Kasb ta`limi, sport faoliyati (faoliyat turlari bo`yicha)</td></tr>
<tr><td>64</td><td>54</td></tr>
<tr><td>ma`ruza:</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td>amaliy:</td><td>24</td><td>24</td></tr>
<tr><td>laboratoriya:</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>mustaqil ta`lim</td><td>28</td><td>18</td></tr>
<tr><td>O`quv kursini statusi</td><td colspan="3">Matematika va tabiiy-ilmiy</td></tr>
<tr><td>Dastlabki tayorgarlik:</td><td colspan="3">Kurs “Matematika”, “Algebra” va “Geometriya” fanlaridan o`zlashtirilgan bilimlarga asoslanadi</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fanning predmeti va mazmuni - Oliy ta`limning Davlat ta`lim standartlariga ko`ra mazkur fan jismoniy tarbiya va sportda matematik hisoblashlarni bajarish bo`yicha bilim, malaka va ko`nikmalarni tizimli shakllantirishga yo`naltirilgan.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fanni o`qitishdan maqsad – talabalarni matematikaning zaruriy ma`lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish hamda sport yo`nalishlarining matematika bilan o`zviy bog`liqliklarini o`rgatishdan iboratdir.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fanning vazifasi: Jismoniy tarbiya va sport ta`limida matematikani o`qitishning vazifasi – hozirgi zamon bozor iqtisodiyoti sharoitlarini hisobga olgan holda har bir jamiyat a`zosining jismoniy va mehnat faoliyati va kundalik hayoti uchun zarur bo`lgan matematik bilim, ko`nikma va malakalarni berish, shuningdek, talabalarning hayotiy tasavvurlari bilan amaliy faoliyatlarini umumlashtirib borib, matematik tushuncha va munosabatlarni ular tomonidan ongli o`zlashtirishlariga hamda hayotga tatbiq eta olishga intilish, talabalarda izchil mantiqiy fikrlashni shakllantirib borish natijasida ularning aql-zakovati rivojiga, tabiat va jamiyatdagi muammolarni hal etishning maqbul yo`llarini topa olishlariga ko`maklashish, umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi sifatida matematika to`g`risidagi tasavvurlarni shakllantirishdan iborat.
“Sportda matematika” fanini o`zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida talabalar:<br>- to`plam elementlari, matritsa va determinant, vektorlarning umumiy tushunchalari, funksiya tushunchasi, funksiya hosilasi haqida tushuncha va uning ta`rifi, differensial hamda integral to`g`risida <i>tasavvurga ega bo`lishi kerak</i>;
- to`plamlar, to`plam elementlari, bo`sh va qism, chekli va cheksiz hamda sonli to`plamlar, kombinatorika elementlari, matritsalar va determinantlar, vektorlar algebrasi,</td></tr>
</table>

chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer, Gauss va matritsa usullari, elementar funksiyalar, darajali, trigonometrik, ko`rsatgichli va logarifmik funksiyalar, limit, hosila va differensial, integral haqida *bilimga ega bo`lishi kerak*;

- matematik amallarni bajarish, elementar funksiyalar bilan ishlash, ularning grafiklarini chizish va sodda tenglamalarni yechish, matritsa va determenatni hisoblash, vektorlar algebrasi, funksiya limitini topish, hosila va differensialni, aniq va noaniq integrallarni hisoblash orqali jismoniy tarbiya va sport sohasida mavzuga oid masalalarni hal eta olish *ko`nikmalariga ega bo`lishi kerak*;
- to`plamlar ustida amallar bajarish, matritsalarni qo`shish, ayirish, songa ko`paytirish, vektorlar ustida amallar bajarish, ya`ni vektorlarni qo`shish va ayirish, vektorlarni songa ko`paytirish, chiziqli tenglamalar sistemasini yechish, funksiyalar limitlarini hisoblash, differensial tenglamalarni yechish, matritsalarni va determinantlarni hisoblash, aniq va aniqmas integrallarni hisoblash, funksiya hosilasi va differensialini hisoblash, integralni hisoblash *malakalariga ega bo`lishi kerak.*

Kursning tematik tarkibi va mazmuni

№	Mavzu	Ma`ruza	Amaliy	Mustaqil ta`lim	
				5610500 – Sport faoliyati (faoliyat turlari bo`yicha) 5210200 – Psixologiya (sport)	5111000 – Kasb ta`limi, sport faoliyati (faoliyat turlari bo`yicha)
1	Sportda matematika faniga kirish. To`plamlar nazariyasining tushuncha va asoslari	2	4	6	4
2	Matritsa va determinant tushunchalari. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish	2	4	6	4
3	Vektorlar algebrasi tushuncha va asoslari	2	4	2	2
	Oraliq nazorat (ON)				
4	Funksiya haqida tushuncha. Chiziqli funksiyalar va ularning grafiklari. Chiziqli tenglamalar	2	4	6	4
5	Funksiya hosilasi va differensiali	2	4	4	2
6	Integral	2	4	4	2
	Oraliq nazorat (ON)				
	Yakuniy nazorat (YaN)				
	Semestr bo`yicha jami:	**12**	**24**	**28**	**18**
	Ta`lim berish va o`qitish	Ma`ruza va amaliy laboratoriya mashgulotlari,			

	uslubi:	mustaqil ishlar (keys stadiy, master-klasslar)		
	Mustaqil ishlar:	O`quv loyihalar, guruhli taqdimot, referatlar, keyslar, dokladlar, krossvodlar va h.k.		
	Maslahatlar va topshiriqlarni topshirish vaqti	Kunlar	Vaqti	Auditoriya
1.				
2.				
3.				

Bilimlarni baholash usullari, mezonlari va tartibi:	
JN va ON ning ballari ishchi dasturida beriladi	
Baholash usullari	Test, yozma ishlar, og`zaki so`rov, prezentatsiyalar va h.k.
Fan bo`yicha talabalar bilimini nazorat qilish va baholash	**Nazorat shakllari** Baholash turlari fan hususiyatidan kelib chiqqan holda so`rovlar og`zaki savol-javob, yozma ish, test sinovlari yoki boshqa ko`rinishda o`tkazilishi mumkin.

Fan bo`yicha talabalar bilimini baholash mezoni

Ball	Talabaning bilim darajasi
86-100	talaba ma`ruza va amaliy mashg`ulot mavzusining nazariy asoslari bo`yicha har tomonlama chuqur va mukammal bilimga ega. Amaliy ishlarni ijodiy va ilmiy yondoshgan holda nazariy bilimlar asosida tushuntira oladi. Olgan natijalarni mustaqil tahlil qila oladi. Xulosa va qaror qabul qila oladi. Ijodiy fikrlay oladi. Mustaqil mushohada yurita olish, olgan bilimlarini amalda qo`llay olish, mohiyatini tushuntirish malakalariga ega. Fikrini bayon eta olish. Tasavvurga ega bo`lish. Mustaqil ish to`liq rasmiylashtirilgan.
71-85	talaba ma`ruza, amaliy mashg`ulot mavzusining nazariy asoslari bo`yicha bilimga ega. Ma`ruza, amaliy mashg`ulotlarini o`qituvchi yordamida tushinadi. Mustaqil mushohada qilish, olgan bilimlarini amalda qo`llay olish, mohiyatini tushuntirish malakalariga ega. Fikrini bayon eta olish. Tasavvurga ega bo`lish. Mustaqil ish yaxshi rasmiylashtirilgan.
55-70	talaba ma`ruza, amaliy mashg`ulot mavzusining nazariy asoslari bo`yicha bilimga ega. Ma`ruza, amaliy mashg`ulotlarini o`qituvchi yordamida tushinadi. Mohiyatini tushuntira oladi. Fikrini bayon eta olish. Tasavvurga ega bo`lish. Mustaqil ish yaxshi rasmiylashtirilgan.
0-54	talaba ma`ruza, amaliy mashg`ulot mavzusining nazariy asoslari bo`yicha bilim to`liq emas. Amaliy mashg`ulotni o`qituvchi yordamida tushinadi. Aniq tasavvurga ega bo`lmaslik. Bilmaslik. Mustaqil ishni rasmiylashtirishda kamchiliklari mavjud.
Fanga doir video ma`ruzalar, videoroliklar:	
Glossariylar:	
Axborot resurs baza:	

ASOSIY QISM

1-modul. To`plamlar nazariyasi. Kombinatorika elementlari

To`plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari. To`plam tushunchasi. To`plam elementlari. Bo`sh va qism to`plam. Chekli va cheksiz to`plamlar. Sonli to`plamlar. To`plam ustida amallar. To`plamlarning birlashmasi va kesishmasi qonunlari. To`plamlarni sinfga ajratish tushunchasi. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar. Kombinatorika elementlari. Kombinatorikada ko`p qo`llaniladigan usul va qoidalar. Asosiy kombinatsiyalar. Takrorli kombinatsiyalar.

2-modul. Matritsa va determinant

Matritsa tushunchasi. Diagonal matritsa. Birlik matritsa. Matritsa ustida amallar. Matritsalarni qo`shish, ayirish, songa ko`paytirish. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa yordamida yechish. Determinantlar va ularning xossalari. Determinantlarni hisoblash. Minor. Algebraik to`ldiruvchi. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. Teskari matritsa.

3-modul. Vektorlar algebrasi

Vektor tushunchasi. Vektorning uzunligi. Vektorning o`qqa proyeksiyasi. Vektorlar ustida amallar. Vektorlarni qo`shish va ayirish. Vektorlarni songa ko`paytirish. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar. Vektorlarning kolleniarlik sharti. Vektorlarni bazis koordinatalari bo`yicha yoyish. Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi. Ikki vektorning vektor ko`paytmasi.

4-modul. Funksiya

Funksiya haqida tushuncha va uning ta`rifi. Chiziqli funksiyalar va ularning grafiklari. Chiziqli tenglamalar. Chiziqli tenglamani grafik usulda yechish. To`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyenti. Chiziqli tenglamalarning tatbiqi. Darajali, trigonometrik, ko`rsatgichli va logarifmik funksiyalar. Funksiyani limiti. Limitlarni hisoblash.

5-modul. Funksiya hosilasi va differensiali

Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o`zgarish sohalari. Funksiyaning o`sishi va kamayishi. Funksiyaning maksimumi va minimumi. Funksiya hosilasi. Hosilani hisoblash qoidalari. Differensiallanuvchi funksiyani birinchi hosila yordami bilan maksimum va minimumga tekshirish. Hosilalar jadvali. Differensial. Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari. Funksiyalarni tekshirishning umumiy sxemasi.

6-modul. Integral

Boshlang`ich funksiya. Aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari. Integrallash jadvali. Aniqmas integralda o`zgaruvchini almashtirish. O`zgaruvchini almashtirish usuli bilan integrallash. Bo`laklab integrallash. Trigonometrik funksiyalarni integrallash. Aniq integral, xossalari. Aniq integralning ta`rifi va uning geometrik ma`nosi. Nyuton-Leybnits formulasi. O`zgaruvchini almashtirish va bo`laklab integrallash yordamida aniq integralni hisoblash. Aniq integralni geometriyaga tatbiqi. Sohaning yuzini aniq integral yordamida topish.

Amaliy mashg`ulotlarini tashkil etish bo`yicha uslubiy ko`rsatmalar

Amaliy mashg`ulotlardan maqsad ma`ruza materiallari bo`yicha talabalarning bilim va ko`nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytirishdan iborat. Bunda talabalar amaliy mashg`ulotlarda misol va masalalarni yechishda, yechimlarni tahlil qilishda olgan nazariy bilimlarini qo`llay olishlari nazarda tutiladi.

Amaliy mashg`ulotlarning tavsiya etilayotgan mavzulari ro`yxati:

1. To`plamlar va ular ustida amallar.
2. To`plamlarning birlashmasi va kesishmasi qonunlari.
3. Kombinatorika elementlari.
4. Kombinatorikada ko`p qo`llaniladigan usul va qoidalar.
5. Matritsa ustida amallar. Matritsalarni qo`shish, ayirish, songa ko`paytirish.
6. Determinantlarni hisoblash.
7. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.
8. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulda yechish.
9. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa yordamida yechish.
10. Vektorlarni qo`shish va ayirish. Vektorlarni songa ko`paytirish.
11. Tekislikda yo`nalishni aniqlash.
12. Vektorlarning kolleniarlik sharti.
13. Vektorlarni bazis koordinatalari bo`yicha yoyish.
14. Ikki vektorning skalyar ko`paytmasini topish.
15. Chiziqli tenglamalarni yechish. Chiziqli tenglamani grafik usulda yechish.
16. To`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyenti.
17. Darajali, trigonometrik, ko`rsatgichli va logarifmik funksiyalar.
18. Funksiyalar limitlarini hisoblash.
19. Elementar funksiyalarning aniqlanish va o`zgarish sohalari.
20. Funksiyaning o`sishi va kamayishi.
21. Funksiyalar hosilalarini hisoblash. Hosilani hisoblash qoidalari.
22. Differensial tenglamalarni yechish.
23. Differensiallanuvchi funksiyani birinchi hosila yordami bilan maksimum va minimumga tekshirish.
24. Funksiyalarni tekshirishning umumiy sxemasi.
25. Aniqmas integrallarni hisoblashga doir misollar yechish.
26. O`zgaruvchini almashtirish usuli bilan integrallash.
27. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.
28. Aniq integrallarni hisoblashga doir misollar yechish.
29. O`zgaruvchini almashtirish va bo`laklab integrallash yordamida aniq integralni hisoblash.

Ishchi dasturni shakllantirish jarayonida mazkur mashg`ulot turiga ishchi o`quv rejada ajratilgan soat hajmiga mos mavzular tanlab o`qitish tavsiya etiladi.

Amaliy mashg`ulotlarni tashkil etish bo`yicha kafedra professor-o`qituvchilari tomonidan ko`rsatma va tavsiyalar ishlab chiqiladi. Ularda talabalar asosiy ma`ruza mavzulari bo`yicha olgan nazariy bilimlari amaliy masalalar yechish, grafik va chizmalar chizish hamda qiyoslab o`rganish asosida yanada boyitiladi. Shuningdek, darslik va o`quv qo`llanmalardan samarali foydalangan holda ilmiy tadqiqotlar o`tkazish orqali talabalar bilimlarini mustahkamlash, malaka va ko`nikmalarini mustahkamlash, mavzular bo`yicha taqdimotlar tayyorlash tavsiya etiladi va o`rgatiladi.

Labaratoriya ishlarini tashkil etish bo`yicha ko`rsatmalar

Fan bo`yicha labaratoriya ishlari namunaviy o`quv rejada ko`zda tutilmagan.

Kurs ishini tashkil etish bo`yicha uslubiy ko`rsatmalar

Fan bo`yicha kurs ishi namunaviy o`quv rejada ko`zda tutilmagan.

Mustaqil ta`limni tashkil etishning shakli va mazmuni

Talabalar darsdan tashqari paytlarda o`tilgan mazularni mustaqil o`zlashtirishlari va egallagan bilimlarini mustahkamlashi, amaliy mashg`ulotlarga tayyorlanib kelishlari uchun tavsiya etilgan asosiy va qo`shimcha adabiyotlardan foydalanishlari zarur bo`ladi.

Mustaqil ta`lim bajariladigan mavzular bo`yicha savolnomalar va testlarni tuzish, savollarga tavsiya etilgan adabiyotlardan foydalangan holda yozma tarzda javob berish, meyoriy hujjatlardan foydalanish, har bir mavzu bo`yicha muammoli masalalarni hal qilish yo`llarini bayon qilish, tavsiyalar berish va boshqalar ko`zda tutilgan.

“Sportda matematika” fanini o`rganuvchi talabalar auditoriyada olgan nazariy bilimlarini mustahkamlash va amaliy masalalarni yechishda ko`nikma hosil qilish uchun mustaqil ta`lim tizimiga asoslanib, kafedra o`qituvchilari rahbarligida mustaqil ish bajaradilar. Bunda ular qo`shimcha adabiyotlarni o`rganib hamda internet saytlaridan foydalanib referatlar va ilmiy dokladlar tayyorlaydilar, amaliy mashg`ulot mavzusiga doir uy vazifalarini bajaradilar, ko`rgazmali qurollar va slaydlar tayyorlaydilar.

Bunda ma`ruzalarda olingan bilimlarini amaliy mashg`ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda sportga oid masalalarni matematik usullar yordamida yechishlari va tushuntirishlari kerak. Mustaqil ta`lim mavzularini o`zlashtirish ta`lim jarayonida uzluksiz nazorat qilib boriladi.

Talabalar mustaqil ta`limini baholash joriy va oraliq nazorat paytida inobatga olinadi. Mustaqil ta`limni tashkil etishning mazmuni: talabalar mustaqil ta`limi mavzulari kelgusida bajariladigan kurs ishlari va bitiruv malakaviy ishlari mavzulari bilan uzviy bog`liqlikda bajariladi.

Talaba mustaqil ta`limni tashkil etishda quyidagilardan foydalanishi tavsiya etiladi:

- darslik va o`quv-uslubiy qo`llanmalardan foydalanib o`quv rejasi mavzularini o`rganish;
- maxsus va davriy-ilmiy uslubiy adabiyot manbalaridan foydalanib bilimlarini mustahkamlash;
- yangi texnika, jarayonlar va texnologiyalarni o`rganish.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ta`limning mavzulari:

1. To`plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari.
2. To`plamlarning birlashmasi va kesishmasi qonunlari.
3. Asosiy va takrorli kombinatsiyalar.
4. Matritsalarning tatbiqiy masalalarda qo`llanilishi.
5. Determinantlarning tatbiqiy masalalarda qo`llanilishi.
6. Teskari matritsa.
7. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.
8. Vektorlar algebrasi.
9. Vektorlarni qo`shish va ayirish. Vektorlarni songa ko`paytirish.
10. Vektorlarning kolleniarlik sharti.
11. Vektorlarni bazis koordinatalari bo`yicha yoyish.
12. Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi.
13. Funksiyalar va ularning grafiklari.
14. To`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyenti.
15. Funksiyani limiti.
16. Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o`zgarish sohalari.

17. Funksiyaning ekstremumlari.
18. Hosila yordamida funksiyani to`liq tekshirish.
19. Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari.
20. Boshlang`ich funksiya.
21. Aniqmas integralning xossalari.
22. Aniq integral va ularnig tatbiqlari.
23. Aniq integralni geometriyaga tatbiqi.
24. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.
25. Nyuton-Leybnits formulasi.

Mustaqil ta`lim soatlari hajimlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta`lim mavzulari shakllantiriladi.

Dasturning informatsion-uslubiy ta`minoti

Mazkur fanni o`qitish jarayonida ta`limning zamonaviy usullari, pedagogik va axborot-komnumikatsiya texnologiyalarini qo`llash nazarda tutilgan. Jumladan, o`lchash nazariyasi asoslari: O`lchash natijalariga statistik ishlov berishning asosiy usullari. O`lchash natijalarining bir o`lchamli qatorlari. O`lchash natijalari qatorining asosiy statistik xarakteristikalarini o`rganishga bag`ishlangan mavzular zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsiya va elektron-didaklik texnologiyalardan foydalanilgan holda o`tkaziladi.

Ma`ruza va amaliy mashg`ulotlarda guruhli fikrlash, “Munozarali dars”, kichik guruhlar musobaqalari, aqliy hujum, klaster, muammoli vaziyat, insert, qadamba-qadam metodi, baliq skleti va boshqa pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi. Amaliy mashg`ulotlar kompyuter tenxologiyasi, elektron o`rgatuvchi dasturlar, elektron darslik va qo`llanmalardan hamda multimedia vositalaridan foydalangan holda olib boriladi.

Mustaqil ta`limni tashkil etishda “Masofali ta`lim” texnologiyalaridan foydalaniladi.

Dasturdagi mavzularni o`qitishda ta`limning zamonaviy usullaridan keng foydalanish, o`quv jarayonini yangi pedagogik va innovatsion texnologiyalar asosida tashkil etish samarali natija beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar royxati

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – 341 p.
2. Rajabov F., Masharipova S. Oliy matematika asoslari. O`quv qo`llanma. 2008. – 343 b.
3. Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O`quv qo`llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. – 400 b.
4. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1,2-qism. 2014.

Qo`shimcha adabiyotlar

1. Howard Anton, Chris Rorres. Elementary Linear Algebra. – Lehigh University: John Wiley&Sons, 2010. – 1276 p.
2. Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo`llanma. – Samarqand: 2009. – 121 b.
3. Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differnsial). Uslubiy qo`llanma. – Samarqand: 2010. – 89 b.
4. Sultonov J.S. Oliy matematika (Funksiya va limitlar). Uslubiy qo`llanma. – Samarqand: 2010. – 73 b.
5. Muminova R., Turdaxunova S. Oliy matematika. Masalalar to`plami. – T.: “IQTISOD-MOLIYA” nashriyoti, 2007. – 204 b.
6. Karimov M. Oliy matematika. O`quv qo`llanma (1-qism). – T.: Iqtisod-Moliya, 2005. – 110 b.
7. Karimov M. Oliy matematika. O`quv qo`llanma (2-qism). – T.: Iqtisod-Moliya, 2006. – 125 b.
8. David Cherney, Tom Denton and Andrew Waldron. Linear Algebra. Davis California, 2013.
9. Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. Tomsk. TPU Press, 2009.
10. Tojiev Sh. Oliy matematikadan masalalar echish. – Toshkent: O`zbekiston, 2002.
11. Soatov Yo.U. Oliy matematika kursi. III tom. – Toshkent: O`qituvchi, 1999.
12. Баврин И.И., Матросов В.Л. Обший курс высшей математики. – М.: Просвешение, 1995.
13. Шипачов В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1999.
14. Луре Л.И. Основы высшей математики. – М.: 2003.
15. Курганов К.А. Варианты домашных и контролных работ по высшей математике, УзМУ. – 2005.
16. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упрожнениях и задачах (I, II). – М.: Высшая школа, 1998.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI MADANIYAT VA SPORT ISHLARI VAZIRLIGI

O'ZBEKISTON DAVLAT JISMONIY TARBIYA INSTITUTI

«INFORMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARI" KAFEDRASI

Ro'yxatga olindi:

№ ___ 8-2.01 ___

2016 y. «27» 08

«TASDIQLAYMAN»

O'quv ishlari bo'yicha prorektor

___ T.X. Umarov

«___» ___ 2016 y.

SPORTDA MATEMATIKA FANINING

ISHCHI O'QUV DASTURI

Bilim sohasi:
100 000 – Gumanitar
600 000 – Xizmatlar
200 000 – Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq

Ta'lim sohasi:
110 000 – Pedagogika
610 000 – Xizmat ko'rsatish
210 000 – Sotsiologiya va psixologiya

Ta'lim yo'nalishi:
5110000 – Kasb ta'limi (5610500 Sport faoliyati (faoliyat turlari bo'yicha))
5610500 – Sport faoliyati (faoliyat turlari bo'yicha)
5210200 – Psixologiya (sport)

№	Fan mavzularining nomi	Jami soatlar	
		Sport faoliyati, Psixologiya	Kasb ta'limi
1	Ma'ruza	12	12
2	Amaliy mashg'ulot	24	24
3	Mustaqil ta'lim	28	18
	Jami:	64	54

TOSHKENT-2016

Ishchi o'quv dasturi O'zR OO'MTV tomonidan 2016 yil «25» 08 da tasdiqlangan o'quv dasturi va o'quv rejaga asosan ishlab chiqilgan.

Tuzuvchilar:

Vafoyev B.R. – O`zDJTI, "Informatika va axborot texnologiyalari" kafedrasi mudiri, i.f.n.;

Axmedova I.N. – O`zDJTI, «Informatika va axborot texnologiyalari» kafedrasi o'qituvchisi.

Taqrizchilar:

Kerimov F.A. – O'zDJTI, "Jismoniy tarbiya nazariyasi va uslubiyati" kafedrasi professori, p.f.d.;

Zikirov O.S. – Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zMU "Differensial tenglamalar va matematik fizika" kafedrasi mudiri, f.-m.f.d.

Fanning ishchi o'quv dasturi «Informatika va axborot texnologiyalari» kafedrasining 2016 yil «25» avgustdagi 1-sonli majlisida muhokamadan o'tgan va fakul'tet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri Vafoyev B.R.

Fanning ishchi o'quv dasturi «Futbol» fakul'teti kengashida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan (2016 yil «25» avgustdagi 1-sonli bayonnoma).

Fakul'tet kengashi raisi Musaev B.B.

FUTBOL FAKULTETI

Kelishildi:
O'quv bo'lim boshlig'i Asatova G.R.

KIRISH

Oliy ta’lim muassasalari uchun matematikadan uzviylashtirilgan dastur mustaqil diyorimizning iqtisodiy, jismoniy, madaniy, ma’rifiy va ma’naviy rivojlanish dinamikasini talabalar ko’z oldida namoyon etish va ular ongiga singdirishga xizmat qiladi. O’zbekiston Respublikasining “Ta’lim to’g’risida”gi qonuni, Kadrlar tayyorlash milliy dasturi va Davlat ta’lim standartlari talablaridan kelib chiqqan holda “Sportda matematika” fanini o’qitishning umumiy maqsad va vazifalari aniqlanadi.

Oliy ta’limning Davlat ta’lim standartlariga ko’ra “Sportda matematika” fani jismoniy tarbiya va sportda matematik hisoblashlarni bajarish bo’yicha bilim, malaka va ko’nikmalarni tizimli shakllantirishga yo’naltirilgan.

O’quv fanning maqsad va vazifalari

“Sportda matematika” fanining o’qitilishidan maqsad – talabalarni matematikaning zaruriy ma’lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish hamda sport yo’nalishlarining matematika bilan uzviy bog’liqliklarini o’rgatishdan iboratdir. Ayni paytda u talabalarni mantiqiy fikrlashga, to’g’ri xulosa chiqarishga, matematik madaniyatini oshirishga xizmat qiladi.

Jismoniy tarbiya va sport ta’limida matematikani o’qitishning vazifasi – hozirgi zamon bozor iqtisodiyoti sharoitlarini hisobga olgan holda har bir jamiyat a’zosining jismoniy va mehnat faoliyati va kundalik hayoti uchun zarur bo’lgan matematik bilim, ko’nikma va malakalarni berish, shuningdek, talabalarning hayotiy tasavvurlari bilan amaliy faoliyatlarini umumlashtirib borib, matematik tushuncha va munosabatlarni ular tomonidan ongli o’zlashtirishlariga hamda hayotga tatbiq eta olishga intilish, talabalarda izchil mantiqiy fikrlashni shakllantirib borish natijasida ularning aql-zakovati rivojiga, tabiat va jamiyatdagi muammolarni hal etishning maqbul yo’llarini topa olishlariga ko’maklashish, umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi sifatida matematika to’g’risidagi tasavvurlarni shakllantirishdan iborat.

Fan bo’yicha talabalarning tasavvur, bilim, malaka va ko’nikmalariga qo’yiladigan talablar

“Sportda matematika” fanini o’zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida talablar:

- to’plam elementlari, matritsa va determinant, vektorlarning umumiy tushunchalari, funksiya tushunchasi, funksiya hosilasi haqida tushuncha va uning ta’rifi, differensial hamda integral to’g’risida ***tasavvurga ega bo’lishi kerak***;
- to’plamlar, to’plam elementlari, bo’sh va qism, chekli va cheksiz hamda sonli to’plamlar, kombinatorika elementlari, matritsalar va determinantlar, vektorlar algebrasi, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer, Gauss va matritsa usullari, elementar funksiyalar, darajali, trigonometrik, ko’rsatgichli va logarifmik funksiyalar, limit, hosila va differensial, integral haqida ***bilimga ega bo’lishi kerak***;
- matematik amallarni bajarish, elementar funksiyalar bilan ishlash, ularning grafiklarini chizish va sodda tenglamalarni yechish, matritsa va determenatni hisoblash, vektorlar algebrasi, funksiya limitini topish, hosila va differensialni, aniq va noaniq integrallarni hisoblash orqali jismoniy tarbiya va sport sohasida mavzuga oid masalalarni hal eta olish ***ko’nikmalariga ega bo’lishi kerak***;

- to'plamlar ustida amallar bajarish, matritsalarni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish, vektorlar ustida amallar bajarish, ya'ni vektorlarni qo'shish va ayirish, vektorlarni songa ko'paytirish, chiziqli tenglamalar sistemasini yechish, funksiyalar limitlarini hisoblash, differensial tenglamalarni yechish, matritsalarni va determinantlarni hisoblash, aniq va aniqmas integrallarni hisoblash, funksiya hosilasi va differensialini hisoblash, integralni hisoblash ***malakalariga ega bo'lishi kerak***.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan bog'liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

"Sportda matematika" fani o'quv rejadagi "Sportda axborot kommunikatsiya texnologiyalari", "Sport metrologiyasi" va "Harakat faoliyati biomexanikasi" fanlarini o'zlashtirishda asos bo'lib hisoblanadi. Shuningdek, umumkasbiy va mutaxassislik fanlarini o'zlashtirishda muhim ahamiyatga ega. Fanni o'rganishda akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida "Matematika" fanlari bo'yicha olingan nazariy va amaliy bilimlar zarur bo'lsa, o'z navbatida bu fandan olingan bilimlar talabalarning bitiruv malakaviy ishlari hamda magistrlik dissertatsiyalarini bajarish, ulardan olingan natijalarni matematik-statistik tahlil qilishda bazaviy bilimlar vazifasini o'taydi.

Fanning jismoniy tarbiya va sportdagi o'rni

Mazkur fan jismoniy tarbiya va sport faoliyati mashg'ulotlarini to'g'ri taqsimlashda va matematik tahlil qilishda zarur bo'ladigan bilim, malaka va ko'nikmalarni shakllantirishda muhim ahamiyatga ega. Jumladan, bo'lajak o'qituvchi va murabbiylar sportchilarning jismoniy tayyorgarlik va natijalarning murakkab tomonlarini aniqlash yo'llarini, ularga ta'sir ko'rsatadigan turli omillarni baholash, o'qitish va mashq jarayonlarining sonli ma'lumotlarini aniqlash, hisob-kitob qilish va tahlil qilish malakasi va ko'nikmalarini egallashlari talab qilinadi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

O'quv jarayoni bilan bog'liq ta'lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada ta'lim berish, muammoli ma'ruzalar o'qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil etish, ilg'or pedagogik texnologiyalardan va multimedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o'ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo'yish, tinglovchilar bilan talabchanlik holatida individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

"Sportda matematika" fanini o'qitish jarayonida zamonaviy axborot texnologiyalari bilan jihozlangan ma'ruza xonasidan foydalaniladi. Yangi pedagogik texnologiyalar, ma'ruza materiallari, elektron o'quv qo'llanma va darsliklar hamda internet tarmog'idagi rasmiy ma'lumotlardan foydalaniladi.

"Sportda matematika" kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. Bu ta'lim o'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishini nazarda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirishda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondashishni nazarda tutadi.

Tizimli yondashuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini: jarayonning mantiqiyligini, uning barcha bo'g'imlarini o'zaro bog'langanligini, yaxlitligini o'zida mujassam etmog'i kerak.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondashuv. Shaxsning sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatini faollashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha qobiliyatlari va imkoniyatlarini, tashabbuskorligini ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi.

Dialogik yondashuv. Bu yondashuv o'quv munosabatlarini yaratish zaruratini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o'z-o'zini faollashtirishi va o'z-o'zini ko'rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim etish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini faollashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni ob'ektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta'minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash - yangi pedagogik va axborot texnologiyalarini o'quv jarayoniga qo'llash.

O'qitishning usullari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta'lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O'qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot, hamkorlik va o'zaro o'rganishga asoslangan frontal, jamoa va guruh.

O'qitish vositalari: o'qitishning an'anaviy shakllari (darslik, ma'ruza matni, amaliy mashg'ulotlar ishlanmasi) bilan bir qatorda - kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan tezkor teskari aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blits-so'rov, oraliq va joriy hamda yakuniy nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ta'limning nazorati.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida talabalarning bilimlari baholanadi.

ASOSIY QISM
Mavzular rejasi va o'quv soatlarining taqsimlanishi

№	Mavzular nomi	Jami	Ma'ruza	Amaliy mashg'ulot	Mustaqil ta'lim	
					KT	SF, SP
1.	Sportda matematika faniga kirish. To'plamlar nazariyasining tushuncha va asoslari	10	2	4	4	6
2.	Matritsa va determinant tushunchalari. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish	10	2	4	4	6
3.	Vektorlar algebrasi tushuncha va asoslari	10	2	4	2	2
4.	Funksiya haqida tushuncha. Chiziqli funksiyalar va ularning grafiklari. Chiziqli tenglamalar	10	2	4	4	6
5.	Funksiya hosilasi va differensiali	10	2	4	2	4
6.	Integral	10	2	4	2	4
	JAMI	**54(64)**	**12**	**24**	**18**	**28**

MA'RUZA MASHG'ULOTLARNING MAZMUNI
Sportda matematika faniga kirish. To'plamlar nazariyasining tushuncha va asoslari (2 soat)

Sportda matematika o`quv fani nimani o'rganadi. Jismoniy tarbiya va sportda matematikaning o'rni. To'plam tushunchasi. To'plam elementlari. Bo'sh va qism to'plam. Chekli va cheksiz to'plamlar. Sonli to'plamlar. To'plam ustida amallar. To'plamlarning birlashmasi va kesishmasi qonunlari. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar. Kombinatorika elementlari. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, munozara, o'z-o'zini nazorat.

Adabiyotlar: A2, A3, Q2, Q5, Q8, Q11.

Matritsa va determinant tushunchalari. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish (2 soat)

Matritsa tushunchasi. Diagonal matritsa. Birlik matritsa. Matritsa ustida amallar. Matritsalarni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa yordamida yechish. Determinantlar va ularning xossalari. Determinantlarni hisoblash. Minor. Algebrik to'ldiruvchi. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. Teskari matritsa.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, integrativ, munozara, o'z-o'zini nazorat.

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A5; Q5, Q7, Q11.

Vektorlar algebrasi tushuncha va asoslari. Vektorlar ustida amallar. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar (2 soat)

Vektor tushunchasi. Vektorning uzunligi. Vektorning oʻqqa proyeksiyasi. Vektorlar ustida amallar. Vektorlarni qoʻshish va ayirish. Vektorlarni songa koʻpaytirish. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar. Vektorlarning kolleniarlik sharti. Vektorlarni bazis koordinatalari boʻyicha yoyish. Ikki vektorning skalyar koʻpaytmasi. Ikki vektorning vektor koʻpaytmasi.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta’lim, munozara, o’z-o’zini nazorat.

Adabiyotlar: A2, A3, A4, Q3, Q5, Q8, Q11.

Funksiya haqida tushuncha. Chiziqli funksiyalar va ularning grafiklari. Chiziqli tenglamalar (2 soat)

Funksiya haqida tushuncha va uning ta’rifi. Chiziqli funksiyalar va ularning grafiklari. Chiziqli tenglamalar. Chiziqli tenglamani grafik usulda yechish. To’g’ri chiziqning burchak koeffitsiyenti. Chiziqli tenglamalarning tatbiqi. Darajali, trigonometrik, ko’rsatgichli va logarifmik funksiyalar. Funksiyani limiti. Limitlarni hisoblash.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta’lim, 3x3 usuli, munozara, o’z-o’zini nazorat.

Adabiyotlar: A2, A3, A4, Q1, Q5, Q7, Q8, Q11.

Funksiya hosilasi va differensiali (2 soat)

Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o’zgarish sohalari. Funksiyaning o’sishi va kamayishi. Funksiyaning maksimumi va minimumi. Hosilani hisoblash qoidalari. Funksiya hosilasi va differensialini hisoblash.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta’lim, T-sxemasi, munozara, o’z-o’zini nazorat.

Adabiyotlar: A2, A3, A4, Q1, Q4, Q5, Q11.

Integral (2 soat)

Boshlang’ich funksiya. Aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari. Integrallash jadvali. Aniqmas integralda o’zgaruvchini almashtirish. O’zgaruvchini almashtirish usuli bilan integrallash. Bo’laklab integrallash. Trigonometrik funksiyalarni integrallash. Aniq integral, xossalari. Aniq integralning ta’rifi va uning geometrik ma’nosi. Nyuton-Leybnits formulasi. O’zgaruvchini almashtirish va bo’laklab integrallash yordamida aniq integralni hisoblash.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta’lim, pog’ona, qadamba-qadam metodi, o’z-o’zini nazorat.

Adabiyotlar: A2, A3, A4, Q3, Q5, Q6, Q8, Q11.

AMALIY MASHG'ULOTLARNING MAZMUNI

To'plamlar va ular ustida amallar (2 soat)

To'plamlarning birlashmasi va kesishmasi qonunlari. To'plamlar ayirmasi. To'plamga to'ldiruvchi. To'plamlarning dekart (to'g'ri) ko'paytmasi. To'plamlar ustida amallar xossalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, munozara, o'z-o'zini nazorat.

Adabiyotlar: A1; A2; Q2; Q6; Q8.

Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar (2 soat)

Kombinatorika. Yig'indi va ko'paytma qoidasi. Tartiblangan to'plam. O'rin almashtirish, o'rinlashtirish. Guruhlash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, shaxsga yo'naltirilgan ta'lim.

Adabiyotlar: A1; A2; Q3; Q4; Q8; Q9.

Matritsa ustida amallar (2 soat)

Matritsalarni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, shaxsga yo'naltirilgan ta'lim.

Adabiyotlar: A1; A2; A3; Q3; Q4; Q8; Q11.

Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa yordamida yechish (2 soat)

Teskari matritsa. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa yordamida yechish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, paradokslar.

Adabiyotlar: A1; A2; A4; Q5; Q7; Q11.

Vektorlarni qo'shish va ayirish. Vektorlarni songa ko'paytirish (2 soat)

Vektor. Nol vektor. Vektor uzunligi,qiymati va yo'nalishi. Vektorlarni qo'shish va ayirish. Vektorlarni songa ko'paytirish.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, paradokslar.

Adabiyotlar: A2; A3; A4; Q5; Q7; Q9.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasini topish (2 soat)

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va uning xossalari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, paradokslar, aqliy hujum.

Adabiyotlar: A2, A3; A4; Q2; Q3; Q6; Q11.

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti (2 soat)

Burchak koeffitsienti ta`rifi. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini hisoblash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, shaxsga yo'naltirilgan ta'lim.

Adabiyotlar: A1, A2; A3; Q3; Q4; Q8; Q11.

Darajali, trigonometrik, ko'rsatgichli va logarifmik funksiyalar (2 soat)

Sodda elementar funksiyalarga kiruvchi Darajali, trigonometrik, ko'rsatgichli va logarifmik funksiyalar bilan ishlash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, paradokslar, aqliy hujum.

Adabiyotlar: A2, A3; A4; Q2; Q3; Q6; Q8.

Funksiyalar limitlarini hisoblash (2 soat)

Cheksizlikka intiluvchi funksiyalar. Cheksiz kichik funksiyalar.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, paradokslar, aqliy hujum.

Adabiyotlar: A1; A3; A4; Q2; Q3; Q6; Q8.

Funksiyalar hosilalarini hisoblash. Hosilani hisoblash qoidalari (2 soat)

Funksiyaning hosilasi. O'zgarmas miqdorning hosilasi. O'zgarmas miqdor bilan funksiya ko'paymasining hosilasi, yig'indining , ko'paytmaning, bo'linmaning hosilasi

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, shaxsga yo'naltirilgan ta'lim.

Adabiyotlar: A2; A3; A4; Q3; Q4; Q9.

Aniqmas integrallarni hisoblashga doir misollar yechish (2 soat)

Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Aniqmas integral va uning xossalari. Integrallash usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim, o'z-o'zini nazorat, paradokslar, aqliy hujum.

Adabiyotlar: A2; A3; A4; Q2; Q3; Q6; Q8

Aniq integrallarni hisoblashga doir misollar yechish (2 soat)

Aniq integralning asosiy hossalari. Aniq integralni hisoblash va hisoblash usullari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: dialogik yondashuv, muammoli ta'lim **,** paradokslar, shaxsga yo'naltirilgan ta'lim, aqliy hujum.

Adabiyotlar: A2, A3; A4; Q2; Q3; Q4; Q9.

MUSTAQIL TA’LIM TASHKIL ETISHNING SHAKLI VA MAZMUNI

“Sportda matematika” fani bo’yicha talabaning mustaqil ta’limi shu fanni o’rganish jarayonining tarkibiy qismi bo’lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to’la ta’minlangan.

Talabalar auditoriya mashg’ulotlarida professor-o’qituvchilarning ma’ruzasini tinglaydilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan topshiriqlarni bajaradi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o’rganish maqsadida qo’shimcha adabiyotlarni o’qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo’yicha testlar echadi. Mustaqil ta’lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo’shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o’rganish, kerakli ma’lumotlarni izlash va ularni topish yo’llarini aniqlash, internet tarmoqlaridan foydalanib ma’lumotlar to’plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to’garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola va ma’ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta’limsiz o’quv faoliyati samarali bo’lishi mumkin emas.

Uy vazifalarini tekshirish va baholash seminar mashg’ulot olib boruvchi o’qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o’zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma’ruza darslarini olib boruvchi o’qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi.

“Sportda matematika” fanidan mustaqil ta’lim majmuasi fan bo’yicha mavzularni qamrab olgan va quyidagi mavzular ko’rinishida shakllantirilgan.

Talabalar mustaqil ta’limining mazmuni va hajmi

№	Mustaqil ta’lim mavzulari	Mustaqil ta’lim uchun topshiriq va tavsiyalar	Hajmi (soatda)	
			Kasbiy ta’lim	SF, SP
1	«Sportda matematika» faniga kirish. To’plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari	Fanning amaliy ahamiyati va matematik asoslari. To’plamlar nazariyasining paydo bo’lishi va asosiy tushunchalari	2	2
2	Asosiy va takrorli kombinatsiyalar	Kombinatorikani hisoblash qoidalari. Sportda kombinatsiyalarni qo’llash.	2	4
3	Matritsalarning tatbiqiy masalalarda qo’llanilishi	Matritsa nazariyasining sportdagi ahamiyati. Sport masalalarini yechishda matritsa usullarini qo’llash	2	4
4	Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar	Determinant xossalari va qoidalarini sport masalalarini hisoblashda qo’llash	2	2
5	Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi	Vektorlar skalyar ko’paytmasi. Vektor uzunligi. Skalyar ko’paytma xossalari	2	4
6	Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o’zgarish sohalari	Funksiya tushunchasi. Sonli funksiya. Funksiyaning berilish usullari orqali uning aniqlanish va o’zgarish sohalarini aniqlash	2	4
7	Funksiyaning	Funksiyaning o’suvchi (kamayuvchiligi)ni	2	2

	ekstremumlari	aniqlash. Ekstremumlari (max, min) nuqtalarini aniqlashga doir masalalarni o'rganish		
8	Hosila yordamida funksiyani to'liq tekshirish	Hosila yordamida funksiyani to'liq tekshirish. Hosilani sport masalalaridagi ahamiyati	2	4
9	Aniqmas integralning xossalari	Integrallash jadvali. Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash	2	4
		Jami:	**18**	**28**

Mustaqil ta'limning rejalari hamda vazifalari

"Sportda matematika" kursi bo'yicha talabalarning mustaqil ta'limini bo'lg'usi jismoniy tarbiya mutaxassislari tayyorgarlikdagi o'rnini baholash oson emas, negaki bo'limlarda berilgan o'quv materiallari juda keng. Mustaqil ta'lim ijodiy amaliy-o'rganish faoliyatining tarkibiy qismi sifatida katta aqliy zo'riqishlarni talab qiladi va yangi bilimlar, malaka hamda ko'nikmalarni o'zlashtirishda o'ziga xos ko'makchi hisoblanadi. Mustaqil ta'lim o'quv jarayonining individuallashtirilishi, shaxsning ijodiy imkoniyatlarini rivojlantirilishini, kasbiy vakolatlar hamda mahoratning ta'minlanishini, o'qituvchi va o'quvchilar orasidagi hamkorlikni ko'zda tutuvchi pedagogik jarayonning strategiyasini belgilaydi.

Mustaqil ta'limning mavzulari:

To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari.
To'plamlarning birlashmasi va kesishmasi qonunlari.
Asosiy va takrorli kombinatsiyalar.
Matritsalarning tatbiqiy masalalarda qo'llanilishi.
Determinantlarning tatbiqiy masalalarda qo'llanilishi.
Teskari matritsa.
Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.
Vektorlar algebrasi.
Vektorlarni qo'shish va ayirish. Vektorlarni songa ko'paytirish.
Vektorlarning kolleniarlik sharti.
Vektorlarni bazis koordinatalari bo'yicha yoyish.
Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi.
Funksiyalar va ularning grafiklari.
To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti.
Funksiyani limiti.
Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
Funksiyaning ekstremumlari.
Hosila yordamida funksiyani to'liq tekshirish.
Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari.
Boshlang'ich funksiya.
Aniqmas integralning xossalari.
Aniq integral va ularnig tatbiqlari.
Aniq integralni geometriyaga tatbiqi.
Trigonometrik funksiyalarni integrallash.
Nyuton-Leybnits formulasi.

Dasturning umumiy axborot ta’minoti

Mazkur fanni o’qitish jarayonida ta’limning zamonaviy usullari, pedagogik va axborot-komnumikatsiya texnologiyalarini qo’llash nazarda tutilgan. Jumladan, matematikaning to’plam, kombinatorika, matrista, determinant, vektor, limit, hosila, differencial, integral nazariyalarini o’rganishga bag’ishlangan mavzular zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsiya va elektron-didaktik texnologiyalardan foydalanilgan holda o’tkaziladi.

Ma’ruza va amaliy mashg’ulotlarda guruhli fikrlash, “Munozarali dars”, kichik guruhlar musobaqalari, aqliy hujum, klaster, muammoli vaziyat, insert, qadamba-qadam metodi, baliq skleti va boshqa pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi. Amaliy mashg’ulotlar kompyuter tenxologiyasi, elektron o’rgatuvchi dasturlar, elektron darslik va qo’llanmalardan hamda multimedia vositalaridan foydalangan holda olib boriladi.

Mustaqil ta’limni tashkil etishda “Masofali ta’lim” texnologiyalaridan foydalaniladi.

Dasturdagi mavzularni o’qitishda ta’limning zamonaviy usullaridan keng foydalanish, o’quv jarayonini yangi pedagogik va innovatsion texnologiyalar asosida tashkil etish samarali natija beradi.

“Sportda matematika” fanidan talabalar bilimini reyting tizimi asosida baholash mezoni

“Sportda matematika” fani bo‘yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma’lumotlar fan bo‘yicha birinchi mashg‘ulotda talabalarga e’lon qilinadi.

Fan bo‘yicha talabalarning bilim saviyasi va o‘zlashtirish darajasini Davlat ta’lim standartlariga muvofiqligini ta’minlash uchun quyidagi nazorat turlari o‘tkaziladi:

- joriy nazorat (JN) – talabaning fan mavzulari bo‘yicha bilim va amaliy ko‘nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. JN fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg‘ulotlarda og‘zaki so‘rov, test o‘tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollokvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o‘tkazilishi mumkin;
- oraliq nazorat (ON) - semestr davomida o‘quv dasturining tegishli (fanning bir nechta mavzusini o‘z ichiga olgan) bo‘limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko‘nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. ON bir semestrda ikki marta o‘tkaziladi va shakli (og‘zaki, yozma ish, test va hokazo) o‘quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;
- yakuniy nazorat (YaN) - semestr yakunida muayyan fan bo‘yicha nazariy bilim va amaliy ko‘nikmalarni talabalar tomonidan o‘zlashtirish darajasini baholash usuli. YaN, asosan, tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan holda semestr davomida o‘tilgan materiallar bo‘yicha o‘tkaziladi.

ON o‘tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o‘rganib boriladi va uni o‘tkazish tartiblari buzilgan hollarda, ON natijalari komissiya qarori bilan bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda ON qayta o‘tkaziladi.

Oliy ta’lim muassasasi rahbarining buyrug‘i bilan ichki nazorat va monitoring bo‘limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida YaNni o‘tkazish jarayoni muntazam ravishda o‘rganib boriladi va uni o‘tkazish tartiblari buzilgan hollarda YaN natijalari komissiya qarori bilan bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda YaN qayta o‘tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, malaka va ko‘nikmalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo‘yicha o‘zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

“Sportda matematika” fani bo‘yicha talabalarning semestr davomidagi o‘zlashtirish ko‘rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi.

Ushbu 100 ball baholash turlari bo‘yicha quyidagicha: YaN. - 30 ball, qolgan 70 ball esa J.N. - 25 ball, mustaqil ta’lim olish - 10 ball va O.N. - 35 ball kabi taqsimlanadi.

Baholash ko‘rsatkichi	**Baholash mezonlari**	**Reyting bali**
A’lo	Ma’ruza va amaliy mashg‘ulot mavzusining nazariy asoslari bo‘yicha har tomonlama chuqur va mukammal bilimga ega. Amaliy ishlarni ijodiy va ilmiy yondoshgan holda nazariy bilimlar asosida tushuntira oladi. Olgan natijalarni mustaqil tahlil qila oladi. Xulosa va qaror qabul qila oladi. Ijodiy fikrlay oladi. Mustaqil mushohada yurita olish, olgan bilimlarini amalda qo‘llay olish, mohiyatini tushuntirish malakalariga ega. Fikrini bayon eta olish. Tasavvurga ega bo‘lish. Mustaqil ta’lim to‘liq rasmiylashtirilgan.	86-100
Yaxshi	Ma’ruza, amaliy mashg‘ulot mavzusining nazariy asoslari bo‘yicha bilimga ega. Ma’ruza, amaliy mashg‘ulotlarini o‘qituvchi yordamida tushinadi. Mustaqil mushohada qilish, olgan bilimlarini amalda qo‘llay olish, mohiyatini tushuntirish malakalariga ega. Fikrini bayon eta olish. Tasavvurga ega bo‘lish. Mustaqil ta’lim yaxshi rasmiylashtirilgan.	71-85
Qoniqarli	Ma’ruza, amaliy mashg‘ulot mavzusining nazariy asoslari bo‘yicha bilimga ega. Ma’ruza, amaliy mashg‘ulotlarini o‘qituvchi yordamida tushinadi. Mohiyatini tushuntira oladi. Fikrini bayon eta olish. Tasavvurga ega bo‘lish. Mustaqil ta’lim yaxshi rasmiylashtirilgan.	55-70
Qoniqarsiz	Ma’ruza, amaliy mashg‘ulot mavzusining nazariy asoslari bo‘yicha bilim to‘liq emas. Amaliy mashg‘ulotni o‘qituvchi yordamida tushinadi. Aniq tasavvurga ega bo‘lmaslik. Bilmaslik. Mustaqil ta’limni rasmiylashtirishda kamchiliklari mavjud.	0-54

Talabalar o‘zlashtirishini bir necha amaliy mashg‘ulotlar doirasida kompleks baholash maqsadida fanning ishchi o‘quv rejasiga muvofiq 5 ta modulga ajratildi. Modullar mavzular mazmuni asosida tuzilgan. Talaba har bir modulga kiritilgan mavzular bo‘yicha o‘zlashtirishi va topshiriqlarni bajarish sifatiga bog‘liq holda to‘plagan ballar miqdori 5 ball bilan baholanadi. To‘planadigan ballar miqdori JNga ajratilgan 25 ball, ONga ajratiladigan 35 ball, mustaqil ta’lim olishga 10 ball va YaNga ajratiladigan 30 ball doirasida bo‘lib, talabaning bilimini xolisona baholash va ularni ko‘nikma hamda malakasi sifatini oshirishga xizmat qiladi. Modullarga ajratilgan ballar kafedra majlis qarori bilan ma’qullangan.

Joriy nazorat mezonlari

Talabaning reyting ballari uning amaliy mashg‘ulotlarni va uy vazifasini bajargani, mustaqil ta’lim yuzasidan tayyorlagan referati, taqdimoti va hisoboti bo‘yicha belgilanadi. Joriy nazorat amaliy mashg‘ulotlarda og‘zaki so‘rov, test o‘tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollokvium, uy vazifalarini tekshirish shakllarida o‘tkaziladi. Joriy baholash uchun 25 ball ajratilgan.

Oraliq nazorat mezonlari

Oraliq nazorat ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlari materiallari bo‘yicha o‘tkaziladi. Semestr davomida 2 ta oraliq nazorat o‘tkaziladi va ularga jami (17 + 18) 35 ball ajratiladi. Oraliq nazorat yozma ish yoki test sinovlari ko‘rinishida o‘tkazilishi mumkin. Oraliq nazorat kompyuter test shaklida o‘tkazilganda testga ajratilgan ballar savollar soniga bo‘linib, bir savolga qo‘yiladigan ball topiladi va uni to‘g‘ri javoblar soniga ko‘paytirib, talabaning oraliq nazoratda to‘plagan ballari aniqlanadi.

Talabalarning mustaqil ta’limini baholash mezonlari

Mustaqil ta’lim qo‘shimcha materiallar bo‘yicha bajariladi. Mavzu talaba tomonidan yuqorida taklif etilgan materiallar bo‘yicha tanlanadi. Mustaqil ta’limning himoyasi ikkinchi oraliq nazoratdan oldin o‘tkaziladi. Maksimal ball – 10.

Yakuniy nazorat mezonlari

Yakuniy nazoratda talabaning bilim, ko‘nikma va malakalari “Sportda matematika” fanining umumiy mazmuni doirasida baholanadi. “Sportda matematika” fanidan yakuniy nazorat bo‘yicha baholashda talabaning semestr davomidagi o‘zlashtirishi yozma ish usulida o‘tkaziladi. Yakuniy nazoratga 30 ball ajratiladi va u semestrning yakunida o‘tkaziladi.

Talabaning semestrda JN va ON turlari bo‘yicha to‘plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foizidan kam bo‘lsa yoki semestrdagi joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo‘yicha to‘plagan yakuniy ballari yig‘indisi 55 balldan kam bo‘lsa, u akademik qarzdor hisoblanadi.

Talaba nazorat natijalaridan norozi bo‘lsa, fan bo‘yicha nazorat turi natijalari e’lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etishi mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdimnomasiga ko‘ra rektor buyrug‘i bilan uch (uch) a’zodan kam bo‘lmagan tarkibda apellyatsiya komissiyasi tashkil etiladi.

Apellyatsiya komissiyasi talabalarning arizalarini ko‘rib chiqib, shu kunning o‘zida xulosasini bildiradi.

Baholashning o‘rnatilgan talablar asosida belgilangan muddatlarda o‘tkazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani, kafedra mudiri hamda ichki nazorat va monitoring bo‘limi tomonidan nazorat qilinadi.

REYTING BAHOLASH TIZIMI

Reyting nazorati jadvali

«Sportda matematika» fani bo‘yicha reyting – nazorat mezonlari
(Sport faoliyati (faoliyat turlari bo‘yicha), Kasb ta’limi (faoliyat turlari bo‘yicha) va Psixologiya (sport) yo‘nalishlari uchun)

Birinchi nazoratni baholash mezonlari				Ikkinchi nazoratni baholash mezonlari				Mustaqil ta’lim	YaN
1 - JN		1 - ON		2 - JN		2 - ON			
Mavzular	ball		ball	Mavzular	ball		ball	Semestr davomida qabul qilinadi	Yakuniy nazorat o‘quv bo‘limi tomonidan tasdiqlangan grafik asosida o‘tkaziladi
№ 1-3 mavzular	5	“5” Baho	15-17	№ 7-8 mavzular	5	“5” Baho	16-18		
№ 4-6 mavzular	5	“4” Baho	13-14	№ 9-10 mavzular	5	“4” Baho	13-15		
		“3” Baho	10-12	№ 11-12 mavzular	5	“3” Baho	10-12		
		“2” Baho	0-9			“2” Baho	0-9		
Jami	10	Maksimal ball	17	Jami	15	Maksimal ball	18	Maksimal ball 10	Maksimal ball 30

Fandan bahoning baldagi chegaralari:

Jami maksimal ball – 100

55 - 70 gacha «3» baho
71 - 85 gacha «4» baho
86 - 100 gacha «5» baho

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – 341 p.
2. Rajabov F., Masharipova S. Oliy matematika asoslari. O'quv qo'llanma. 2008. – 343 b.
3. Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. – 400 b.
4. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1,2-qism. 2014.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Howard Anton, Chris Rorres. Elementary Linear Algebra. – Lehigh University: John Wiley&Sons, 2010. – 1276 p.
2. Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: 2009. – 121 b.
3. Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differnsial). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: 2010. – 89 b.
4. Sultonov J.S. Oliy matematika (Funksiya va limitlar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: 2010. – 73 b.
5. Muminova R., Turdaxunova S. Oliy matematika. Masalalar to'plami. – T.: "IQTISOD-MOLIYA" nashriyoti, 2007. – 204 b.
6. Karimov M. Oliy matematika. O'quv qo'llanma (1-qism). – T.: Iqtisod-Moliya, 2005. – 110 b.
7. Karimov M. Oliy matematika. O'quv qo'llanma (2-qism). – T.: Iqtisod-Moliya, 2006. – 125 b.
8. David Cherney, Tom Denton and Andrew Waldron. Linear Algebra. Davis California, 2013.
9. Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. Tomsk. TPU Press, 2009.
10. Tojiev Sh. Oliy matematikadan masalalar echish. – Toshkent: O'zbekiston, 2002.
11. Soatov Yo.U. Oliy matematika kursi. III tom. – Toshkent: O'qituvchi, 1999.
12. Баврин И.И., Матросов В.Л. Обший курс высшей математики. – М.: Просвешение, 1995.
13. Шипачов В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1999.
14. Луре Л.И. Основы высшей математики. – М.: 2003.
15. Курганов К.А. Варианты домашних и контролных работ по высшей математике, УзМУ. – 2005.
16. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (I, II). – М.: Высшая школа, 1998.

Internet saytlari

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_algebra
2. https://www.math.ucdavis.edu/~linear/linear-guest.pdf
3. www.mcce.ru
4. www.lib.mexmat.ru
5. www.a-geometry.narod.ru
6. www.allmath.ru
7. www.ziyonet.uz

SPORTDA MATEMATIKA FANIGA KIRISH. TO`PLAMLAR NAZARIYASINING TUSHUNCHA VA ASOSLARI

REJA

- Jismoniy tarbiya va sportda matematikaning o`rni
- To`plam haqida tushuncha
- Sonli to`plamlar
- To`plam ustida amallar
- Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar

Tayanch iboralar: To`plam, to`plam elementlari. Bo`sh va qism to`plam. Chekli va cheksiz to`plamlar. Sonli to`plamlar. To`plamlarning birlashmasi va kesishmasi qonunlari. Kombinatorika. Kombinatorika elementlari.

> Hozirgi zamon matematikasi tarkibiga cheksiz to`plam tushunchasini kirishi uni tubdan revolyutsionlashtirdi.
>
> ***Aleksandrov P.S.***

Jismoniy tarbiya va sportda matematikaning o`rni

Hozirgi kunda amalda o`z ijrosini namoyon etayotgan O`zbekiston Konstitutsiyasi, qator qonunlar, jumladan, "Ta`lim to`g`risida"gi va "Jismoniy tarbiya va sport to`g`risida"gi qonunlar, Prezident farmonlari hamda Hukumat qarorlari mamlakatimizda jismoniy tarbiya va sport sohasini bozor munosabatlariga moslashtirish va uni rivojlantirish sur`atini jadallashtirishga qaratilgan moddiy-huquqiy imkoniyatlarini yaratib bermoqda.

Oliy ta`limning Davlat ta`lim standartlariga ko`ra «**Sportda matematika**» fani jismoniy tarbiya va sportda matematik hisoblashlarni bajarish bo`yicha bilim, malaka va ko`nikmalarni tizimli shakllantirishga yo`naltirilgan.

Talabalarni mantiqiy fikrlashga, nazariy bilimlarni amaliyotga bevosita tatbiq etishga, to`g`ri xulosa chiqarish va qaror qabul qilishga o`rgatish sportda matematika fanining asosiy vazifalaridan hisoblanadi.

> Sportda matematika fanining o`qitilishida – talabalarni matematikaning zaruriy ma`lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni echish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish hamda sport yo`nalishlarini matematika bilan uzviy bog`liqliklarini o`rganishdan iboratdir. Ayni paytda u talabalarni mantiqiy fikrlashga, to`g`ri xulosa chiqarishga, matematik madaniyatini oshirishga xizmat qiladi.

"Sportda matematika" fanining o`qitilishidan maqsad – talabalarni matematikaning zaruriy ma`lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish hamda sport yo`nalishlarining matematika bilan uzviy bog`liqliklarini o`rgatishdan iboratdir. Ayni paytda u talabalarni mantiqiy fikrlashga, to`g`ri xulosa chiqarishga, matematik madaniyatini oshirishga xizmat qiladi.

Jismoniy tarbiya va sport ta`limida matematikani o`qitishning vazifasi – hozirgi zamon bozor iqtisodiyoti sharoitlarini hisobga olgan holda har bir jamiyat a`zosining jismoniy va mehnat faoliyati va kundalik hayoti uchun zarur bo`lgan matematik bilim, ko`nikma va malakalarni berish, shuningdek, talabalarning hayotiy tasavvurlari bilan amaliy faoliyatlarini umumlashtirib borib, matematik tushuncha va munosabatlarni ular tomonidan ongli o`zlashtirishlariga hamda hayotga tatbiq eta olishga intilish, talabalarda izchil mantiqiy fikrlashni shakllantirib borish natijasida ularning aql-zakovati rivojiga, tabiat va jamiyatdagi muammolarni hal etishning maqbul yo`llarini topa olishlariga ko`maklashish, umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi sifatida matematika to`g`risidagi tasavvurlarni shakllantirishdan iborat.

Mazkur fan jismoniy tarbiya va sport faoliyati mashg`ulotlarini to`g`ri taqsimlashda va matematik tahlil qilishda zarur bo`ladigan bilim, malaka va ko`nikmalarni shakllantirishda muhim ahamiyatga ega. Jumladan, bo`lajak o`qituvchi va murabbiylar sportchilarning jismoniy tayyorgarlik va natijalarning murakkab tomonlarini aniqlash yo`llarini, ularga ta`sir ko`rsatadigan turli omillarni baholash, o`qitish va mashq jarayonlarining sonli ma`lumotlarini aniqlash, hisob-kitob qilish va tahlil qilish malakasi va ko`nikmalarini egallashlari talab qilinadi.

To`plamlar va ular ustida amallar

To`plam tushunchasi matematikani boshlang`ich tushunchalaridan bo`lib, unga ta`rif berilmaydi. To`plam tushunchasi nimalardan iborat ekanligini tushunish uchun quyidagi misollarga murojaat qilamiz.

1) Futbol maydonidagi o`yinchilar to`plami.
2) Hamma butun sonlar to`plami.
3) Tekislikdagi biror nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziqlar to`plami.
4) Markazi berilgan nuqtada bo`lgan aylanalar to`plami.
5) N natural sonlar to`plami va hokazo.

Matematikada to`plam haqida so`z yuritilganda, bir qancha narsalar bittaga birlashtirilib qaraladi va A, B, C, D, ... harflar bilan belgilanadi. Yuqoridagi misollardan ko`rinadiki, har bir to`plam nomining o`zi qaysi elementlar bu to`plamga kiritilganini ko`rsatib turibdi. To`plam elementlari kichik a,b,c,d,..harflar bilan belgilanadi. Agar A to`plam a,b,c elementlardan tashkil topgan bo`lsa, $A=\{a,b,c\}$ kabi yoziladi. Agar A to`plamni ixtiyoriy elementini X harfi bilan belgilasak, uni $A=\{x\}$ kabi yozamiz. Masalan, barcha natural sonlar to`plamini N desak, $N=(1,2,3,4,...)$ kabi belgilanadi, buni yana $A=\{n\}$ kabi ham yozish mumkin.

Agar biror a narsa A to`plamning elementi bo`lsa, $a\in A$ ko`rinishida yoziladi. $a\notin A$ belgilash esa a element A to`plamga tegishli emasligini bildiradi. Masalan, natural sonlar to`plamini N bilan belgilasak, u holda $5\in N$, $7\in N$, $0\notin N$, $5{,}2\notin N$ ko`rinishlarda yozish mumkin. Birorta elementga ega bo`lmagan to`plam **bo`sh to`plam** deyiladi.

Masalan, parallel to`g`ri chiziqlarning kesishish nuqtalari to`plami, $x^2+1=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to`plami, kvadrati ikkiga teng bo`lgan ratsional sonlar to`plami va hokazo. Bo`sh to`plam odatda $\varnothing$ simvol bilan belgilanadi. A va B to`plamlar bir xil elementlardan iborat bo`lsa, teng to`plamlar deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi. Bundan tashqari matematikada yana quyidagi belgilashlar ham ishlatiladi.

$\forall$ - har qanday degan belgi, $\exists$ - mavjudki degan belgidir.

$\wedge$ - va belgisi, $\vee$ - yoki belgisidir.

$\Leftrightarrow$ - bo`lganda faqat shundagina, $\Rightarrow$ kelib chiqadi. Bu belgilashlarga ko`ra A va B to`plamlar tengligini quyidagicha yozish mumkin:

$$(A=B)\Leftrightarrow((\forall x\in A \Rightarrow x\in B)\wedge(\forall x\in B\Rightarrow x\in A)).$$

A va B to`plamlar bir xil elementlarni o`z ichiga olganda va faqat shundagina tengdir.

Masalan, 1 dan 10 gacha bo`lgan natural sonlar to`plamlari bu sonlar qaysi tartibda joylashganligidan qat`iy nazar o`zaro tengdir. Agar A to`plamning har bir elementi B to`plamning ham elementi bo`lsa, u holda A to`plam B to`plamning qism to`plami deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi. Bu ta`rifga ko`ra har qanday to`plam o`z-o`zining qism to`plami hisoblanadi.

Masalan, $N \subset Z$, $Q \subset R$, A - sinfdagi o`quvchilar to`plami, B - bir to`garakka qatnashuvchi o`quvchilar to`plami bo`lsa, $B \subset A$ kabi yoziladi.

Ko`pincha matematikada tadqiqot maqsadlariga qarab berilgan A to`plamdan barcha elementlari biror umumiy xossaga ega bo`lgan qism to`plam ajratiladi, unda A to`plamning hamma elementlari shu xossaga ega bo`lavermaydi. Uni quyidagicha yoziladi:

$\{x \in A \ ...\}$ bu degan so`z A to`plamga tegishli va "... " xossaga ega bo`lgan barcha x lar to`plami. Masalan, 3 dan kichik natural sonlar to`plami B ni quyidagicha yozish mumkin: $B=\{x \in N: x<3\}=\{1,2\}$

Ratsional sonlar to`plami

Ta`rif:** Cheksiz davriy o`nli kasr ko`rinishida yozish mumkin bo`lgan sonlar **ratsional sonlar deyiladi[1].

Barcha musbat va manfiy butun va kasr sonlar nol soni bilan birgalikda ratsional sonlar to`plamini hosil qiladi. Ratsional sonlar to`plamini yana quyidagicha ta`riflash mumkin. Barcha $\frac{p}{q}$ ko`rinishidagi sonlarga ratsional sonlar to`plami deyiladi. Bu erda p, $q \neq 0$ butun sonlar. Ratsional sonlar Q harfi bilan belgilanadi. Ratsional sonlar to`plami quyidagi muhim xossaga ega[2]:

I. Q ratsional sonlar to`plami tartiblangan to`plamdir. Ixtiyoriy ikkita a va b ratsional sonlar olinsa, ular uchun $a=b$, $a>b$ yoki $a<b$ munosabatdan faqat bittasigina o`rinlidir.

II. Q ratsional sonlar to`plami zich joylashgan to`plamdir. Ixtiyoriy a va b ratsional son olinsa, bu ratsional sonlar orasida yotuvchi bitta yoki cheksiz ko`p ratsional son yotadi. Masalan, $c=\frac{a+b}{2}$ ratsional son uchun $a<c<b$ bo`ladi. Ixtiyoriy ikkita a va b ratsional son orasida kamida bitta ratsional son mavjudligidan bu ratsional sonlarning orasida cheksiz ko`p ratsional sonlarni mavjudligi kelib chiqadi.

Irratsional son ta`rifi

Irratsional son tushunchasini nemis matematigi Dedikind (1831-1916) nazariyasi bo`yicha kiritamiz. Shu maqsadda biz barcha ratsional sonlar to`plamini ikkita bo`sh bo`lmagan A va A` to`plamlarga ajratamiz.

**Ta`rif:** Agar 1) har bir ratsional son A va A` to`plamlardan faqat bittasigagina tegishli bo`lsin. 2) A to`plamga tegishli bo`lgan a ratsional son A` to`plamga tegishli bo`lgan a` ratsional sondan kichik bo`lsa, bu bo`linish ratsional sonlar to`plamida bajarilgan kesim deyiladi va uni (A/A`) kabi belgilanadi. Yuqoridagi ta`rifdan ko`rinadiki, Q ratsional sonlar to`plamida kesim hosil bo`lishi uchun uning qism to`plamlari A va A` lar uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak ekan[3].

1) $A \neq \emptyset$, A` $\neq 0$
2) $A \cup$ A` $=Q$
3) $\forall\, a \in A,\ \forall a' \in A' \Rightarrow a<a'$

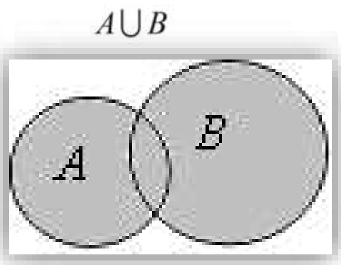
To`plamlarning birlashmasi

---

[1] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1-qism, 2014. – B. 14.
[2] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 18.
[3] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1-qism, 2014. – B. 15.

Har qanday ikkita to`plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to`plamga shu **to`plamlarning birlashmasi** (yoki **yig`indisi**) deb aytiladi.

Bu ta`rifdan ko`rinib turibdiki, to`plamlarning umumiy elementlari shu to`plamlarning birlashmasiga faqat bir martadan kiritiladi. Berilgan to`plamlarning birlashmasidagi har qanday element shu to`plamlarning hech bo`lmaganda bittasiga tegishlidir. $A$ va $B$ to`plamlarning birlashmasi $A\bigcup B$ kabi belgilanadi. Bu yerda "A va B to`plamlarga birlashma amalini qo`llab (yoki A va B to`plamlar ustida birlashma amali bajarilib), $A\bigcup B$ to`plam hosil qilindi" deyish mumkin. 1.1-shaklda A va B to`plamlar doiralar ko`rinishida, $A\bigcup B$ to`plam esa bo`yab tasvirlangan[4].



1.1-shakl

Misol. $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$ va $C=\{e,f,k\}$ bo`lsin. U holda $E=A\bigcup B=\{a,b,c\}$, $E\bigcup C=\{a,b,c,e,f,k\}$, $C\bigcup B=\{a,b,c,e,f,k\}$, $A\bigcup C=\{a,b,e,f,k\}$ bo`ladi. ■

Misol. O`zbekiston Respublikasining yoshi 16dan 25gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini $A$ bilan, yoshi 21dan 30gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini esa $B$ bilan belgilasak, $A$ va $B$ to`plamlarning $A\bigcup B$ birlashmasi O`zbekiston Respublikasining yoshi 16dan 30gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini tashkil etadi. ■

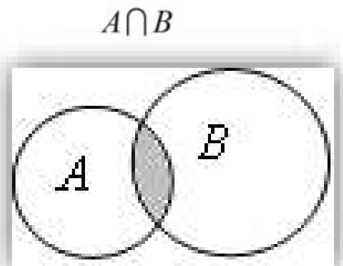
Misol. $\mathbf{N}\bigcup\mathbf{R}=\mathbf{R}$. ■

Shuni ta`kidlash kerakki, to`plamlar bilan bog`liq tushunchalar va ular ustidagi amallar, mos ravishda, sonlar bilan bog`liq tushunchalar va oddiy arifmetik amallar bilan qiyoslanadi. Jumladan, to`plamlar yig`indisini (birlashmasini) topish amali sonlarni qo`shish amali bilan qiyoslanadi. Bunday qiyoslashlar, ko`pincha, bir-biriga o`xshash natijalarning mavjudligini ko`rsatadi, ba`zan esa ular to`plamlarning farqli xususiyatlarga egaligini namoyon etadi. Masalan, ixtiyoriy A va B to`plamlar uchun $A\subseteq B$ bo`lsa, u holda $A\bigcup B=B$ va $B\bigcup A=B$ bo`ladi, lekin, ixtiyoriy $a$ va $b$ sonlar uchun $a\le b$ bo`lgan holda $a+b=b$ va $b+a=b$ tengliklar bajarilmasligi mumkin, ular faqat $a=0$ bo`lsagina o`rinlidir.

To`plamlarning kesishmasi

Ta`rif:** Har qanday ikkita to`plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to`plamga **to`plamlarning kesishmasi (yoki **ko`paytmasi**) deyiladi[5].

Berilgan A va B to`plamlarning kesishmasi $A\bigcap B$ kabi belgilanadi. Bu yerda "$A$ va $B$ to`plamlarga kesishma amalini qo`llab, $A\bigcap B$ to`plam hosil qilindi" deyish mumkin. 1.2-shaklda A va B to`plamlar doiralar ko`rinishida, $A\bigcap B$ to`plam esa bo`yab tasvirlangan. To`plamlar ustidagi amallarning yuqorida ta`kidlangan o`ziga xos xususiyatlari to`plamlar ko`paytmasini (kesishmasini) topishda ham namoyon bo`ladi. Masalan, $A\subseteq B$ bo`lsa, u holda $A\bigcap B=A$ va $B\bigcap A=A$ bo`ladi.



1.2-shakl

Ta`rif:** Bitta ham umumiy elementga ega bo`lmagan ikkita to`plamlarning kesishmasi bo`sh to`plam bo`lishi tabiiydir. Kesishmasi bo`sh bo`lgan to`plamlar **o`zaro kesishmaydigan, kesishmasi bo`sh bo`lmagan to`plamlar esa **o`zaro kesishadigan to`plamlar** deb ataladi[6].

Misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo`lsa, u holda $D=A\bigcap B=\{a,b,c\}$, $D\bigcap C=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $B\bigcap C=\varnothing$, $D\bigcap B=\{a,b,c\}$ bo`ladi. ■

---

[4] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 20.
[5] Jo'raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 22.
[6] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 21.

Misol. 2- misolda aniqlangan A va B to`plamlarga kesishma amalini qo`llasak, O`zbekiston Respublikasining yoshi 21dan 25gacha bo`lgan fuqarolari to`plami ( $A \cap B$ to`plam) hosil bo`ladi. Bu yerda $A$ va $B$ to`plamlar o`zaro kesishadigan to`plamlardir. ■

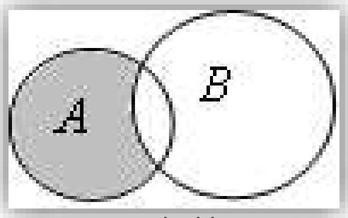
Misol. $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{N}$. ■

Misol. Butun dunyoda 2005 yilda tug`ilgan bolalar to`plamini T_5 bilan, 2006 yilda tug`ilgan bolalar to`plamini esa T_6 bilan belgilasak, u holda $T_5 \cap T_6 = \varnothing$ bo`ladi. Demak, $T_5$ va $T_6$ to`plamlar o`zaro kesishmaydigan to`plamlardir. ■

To`plamlarning ayirmasi

Ixtiyoriy A va B to`plamlar berilgan bo`lsin. A to`plamning $B$ to`plamda bo`lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to`plamni hosil qilish A to`plamdan $B$ to`plamni ayirish deb, tuzilgan to`plam esa, shu $A$ va $B$ **to`plamlarning ayirmasi** deb ataladi.

$A \setminus B$



1.3-shakl

A to`plamdan $B$ to`plamni ayirish natijasida hosil bo`lgan to`plam, ya`ni $A$ va $B$ to`plamlarning ayirmasi $A \setminus B$ yoki $A - B$ ko`rinishida belgilanadi. Bu yerda "$A$ to`plamdan B to`plamni ayirish amalini qo`llab, $A \setminus B$ to`plam hosil qilindi" deyish mumkin. 1.3-shaklda $A$ va $B$ to`plamlar doiralar ko`rinishida, $A \setminus B$ to`plam esa bo`yab tasvirlangan.

Ixtiyoriy A va B to`plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo`lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$ va $B \setminus A = \varnothing$ bo`lishi ta`rifdan bevosita kelib chiqadi.

Misol. 1-misoldagidek, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{e, f, k\}$ bo`lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{c\}$, $B \setminus C = \varnothing$ bo`ladi. ■

Misol. A va B to`plamlar 2-misoldagidek aniqlangan bo`lsin. U holda, A to`plamdan $B$ to`plamning ayirmasi $A \setminus B$ O`zbekiston Respublikasidagi yoshi 16dan 21gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini, $B$ to`plamdan A to`plamning ayirmasi $B \setminus A$ esa O`zbekiston Respublikasining yoshi 25dan 30gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini anglatadi. ■

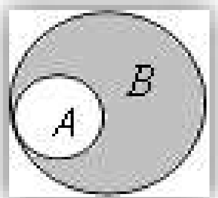
Misol. $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ ayirma tarkibida natural sonlar qatnashmagan barcha haqiqiy sonlar to`plamidan iboratdir va $\mathbf{N} \setminus \mathbf{R} = \varnothing$. ■

To`ldiruvchi to`plam

Faraz qilaylik, A va B to`plamlar berilgan va $A \subseteq B$ bo`lsin. Bu holda B to`plamning $A$ to`plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan $B \setminus A$ to`plam $A$ to`plamning B **to`plamgacha to`ldiruvchi to`plami** deb ataladi[7].

A to`plamning $B$ to`plamgacha to`ldiruvchi to`plami, odatda, $\overline{A}_B$ ko`rinishda belgilanadi. Bu yerda "$\overline{A}_B$ to`plam A to`plamni $B$ to`plamgacha to`ldiradi" yoki "$A$ to`plamni B to`plamgacha to`ldirish amalini qo`llab, $\overline{A}_B$ to`plam hosil qilindi" deyish mumkin. 1.4-shaklda A to`plam kichik doira, $B$ to`plam katta doira ko`rinishida, $\overline{A}_B$ to`plam esa bo`yab tasvirlangan.

$\overline{A}_B$



1.4-shakl

To`plamlar ustidagi yuqorida keltirilgan birlashma, kesishma va to`ldiruvchi to`plam tushunchalari ta`riflarini bevosita qo`llab, $A \cup \overline{A}_B = B$, $A \cap \overline{A}_B = \varnothing$, $A \setminus \overline{A}_B = A$ va $\overline{A}_B \setminus A = \overline{A}_B$ tengliklarni hosil qilish qiyin emas[8].

---

[7] Jo'raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 27.

[8] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P.22.

Misol. Barcha juft sonlar to`plamini $A=\{2,4,...,2n,...\}$ ($n \in N$) deb belgilasak, $A$ to`plamni N to`plamgacha to`ldirish amalini qo`llab $\overline{A}_N=\{1,3,...,2n-1,...\}$ to`plamni, ya`ni barcha toq sonlar to`plamini hosil qilamiz. Demak, barcha toq sonlar to`plami barcha juft sonlar to`plamini natural sonlar to`plamigacha to`ldiradi. Xuddi shunga o`xshash, barcha toq sonlar to`plamini natural sonlar to`plamigacha to`ldirish amalini qo`llab, barcha juft sonlar to`plamini hosil qilish mumkin. ■

Universal to`plam

Ta`rif:** Agar ko`rilayotgan barcha to`plamalarni biror Ω to`plamning qism to`plamlari kabi qarash mumkin bo`lsa, unda Ω **universal to`plam deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog`liq barcha to`plamlar uchun Ω=(–∞, ∞), insonlardan iborat to`plamlar uchun Ω={Barcha odamlar} universal to`plam bo`ladi.

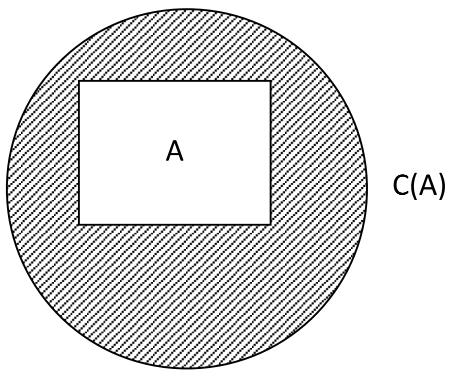
Ta`rif:** Agar A to`plam Ω universal to`plamning qismi bo`lsa, unda Ω\A to`plam **A to`plamning to`ldiruvchisi deb ataladi va C(A) kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada Ω universal to`plam doiradagi, A to`plam esa uning ichida joylashgan to`ri to`rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo`lsa, uning to`ldiruvchisi C(A) 1.5-shakldagi shtrixlangan sohadan iborat bo`ladi:

Demak, C(A) to`plam A to`plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo`ladi, ya`ni $x \in A \Rightarrow x \notin C(A), \quad x \notin A \Rightarrow x \in C(A).$

Masalan, Ω={Barcha korxonalar}, A={Rejani bajargan korxonalar} bo`lsa, unda C(A)={Rejani bajarmagan korxonalar} to`plami bo`ladi;

1.5-shakl

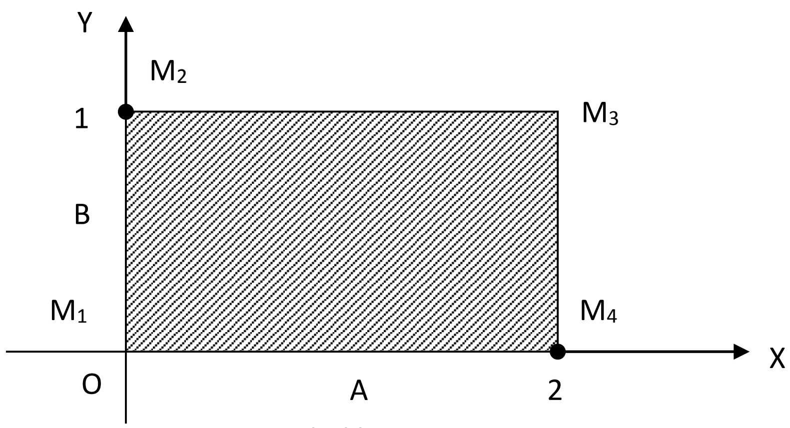


Ω={1,2,3,…,n,…} – natural sonlar to`plami, A={2,4,6,…,2n,…} – juft sonlar to`plami, B={5,6,7,…,n,…} – 4dan katta natural sonlar to`plami bo`lsa, unda

C(A)={1,3,5,…,2n-1,…} – toq sonlar, C(B)={1,2,3,4}–5dan kichik natural sonlar to`plamlarini ifodalaydi.

Ta`rif:** A va B to`plamlarning **Dekart ko'paytmasi deb A×B kabi belgilanadigan va (x,y) (x∈A, y∈B) ko`rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to`plamga aytiladi.

Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] bo`lsa, A×B to`plam tekislikdagi (x, y) (x∈A=[0,2], y∈B=[0,1]) nuqtalardan, ya`ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to`g`ri to`rtburchakdan iborat bo`ladi (1.6-shakl):



1.6-shakl

Agar C={Tajribali ishchilar} va D={Yosh ishchilar} bo`lsa, unda C×D tajribali va yosh ishchidan iborat bo`lgan turli “ustoz-shogird” juftliklaridan iborat to`plamni ifodalaydi.

Umuman olganda to`plamlarning Dekart ko`paytmasi uchun A×B≠B×A, ya`ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] to`plamlar uchun A×B asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo`lgan to`g`ri to`rtburchakni , B×A esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo`lgan to`g`ri to`rtburchakni ifodalaydi va bunda A×B≠B×A bo`ladi.

Universal to`plam va bulean[9] tushunchalari

To`plamlar nazariyasida, odatda, to`plamlar orasidagi turli munosabatlarni hisobga olishga to`g`ri keladi. Masalan, qaralayotgan to`plamlarning barchasi qandaydir boshqa bir to`plamning qism to`plami bo`lishi mumkin. Bu holda qaralayotgan barcha to`plamlarni o`zida qism to`plam sifatida saqlovchi to`plamga **universal to`plam** deb aytiladi.

Universal to`plam, odatda, $\mathbf{U}$ deb belgilanadi. Universal to`plamni **universum** deb ham atashadi.

Shuni ta`kidlash kerakki, universal to`plam tushunchasi nisbiy tushunchadir. Masalan, O`zbekiston sharoitida aholi bilan bog`liq qandaydir masala qaralayotgan bo`lsa, u holda O`zbekiston aholisi to`plamini universal to`plam deb qarash mumkin. O`z navbatida, O`zbekiston aholisi to`plami dunyo aholisi to`plamining qism to`plamidir.

Universal to`plamning ta`rifiga binoan, uning hamma qism to`plamlari orasida ikkita xosmas qismi bor: bittasi universal to`plamning o`zi, ikkinchisi esa bo`sh to`plam. Tabiiyki, universal to`plamning qolgan barcha qism to`plamlari xos qism to`plamlaridir.

Ko`pincha, berilgan “$A$ to`plamning universal to`plamgacha to`ldiruvchisi” deyish o`rniga, qisqa qilib, berilgan “$A$ to`plamning to`ldiruvchisi” deb aytiladi va $\overline{A}$ ko`rinishda belgilanadi. Bu yerda “$\overline{A}$ to`plam $A$ to`plamni to`ldiradi” yoki “$\overline{A}$ to`plam A to`plamdan to`ldirish amalini qo`llab hosil qilindi” deyish mumkin.

To`plamlar nazariyasida bulean tushunchasi kiritilgan bo`lib, u muhim tushunchalardan biri hisoblanadi. Berilgan A to`plamning barcha qism to`plamlaridan tuzilgan to`plam $A$ **to`plamning buleani** (A **to`plam uchun bulean**) deb ataladi.

A to`plamning buleani $2^A$ ko`rinishda belgilanadi.

Misol. To`rtta elementga ega $A=\{a,b,c,d\}$ to`plam uchun 2^A bulean o`n oltita element-to`plamlardan iborat bo`ladi:

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}.$$

Ravshanki, $|A|=4$ va $\left|2^A\right|=16$. ■

Kombinatorika elementlari

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to`plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning **o`rin almashtirishlar**, **o`rinlashtirishlar** va **gruppalashlar** deb ataluvchi asosiy ko`rinishlari o`rganiladi[10].

> Kombinatorikada qo`shish va ko`paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

**Ta`rif:** Biror chekli to`plam elementlari ichidan ma`lum bir xossaga ega bo’lgan elementlardan iborat qilsin to`plamlarni tanlab olish yoki to`plam elementlari ma`lum bir

[9] Bu ibora ingliz matematigi va mantiqchisi Jorj Bul (George Boole, 1815-1864) sharafiga shunday nomlangan.
[10] Jo‘raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 31.

tartibda joylashtirish bilan bog'liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi[11].

**Ta`rif:** To`plamlar nazariyasining kombinatorik masalalar bilan shugullanadigan qismi kombinatorika deyiladi.

Masalan: O`nta yakkakurashchilarni (boks, kurash, qilichbozlik,...) bellashuvga bir necha xil usulda o`tkazish mumkin:

- jismoniy sifatlardagi sifatlarni (kuch, tezkorlik, chaqqonlik, egiluvchanlik, chidamlilik) turlicha tartibda birlashtirish.
- sport turlarida jismoniy sifatlarni (kuch, tezkorlik, chaqqonlik, egiluvchanlik, chidamlilik) har xil tartibda rivojlantirish.

Kombinatorikada qo`shish va ko`paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud. Avvalo to`plamlar nazariyasiga doir bir teoremani keltiramiz.

Teorema: Agarda A va V chekli to`plamlar bo`lib, ulardagi elementlar soni n(A) va n(B) bo`lsa, u holda $A\cup V$ to`plamdagi elementlar soni $n(A\cup V)$ quyidagicha topiladi.

$n(A\cup V)= n(A)+ n(V)$, agarda $A\cap V= \varnothing$ bo`lsa,

$n(A\cup V)= n(A)+ n(V)- n(A\cap V)$, $A\cap V\neq\varnothing$ bo`lsa.

Bu teoremadan kombinatorikaning qo`shishi qoidasi kelib chiqadi.

Qo`shish qoidasi

Agarda biror α tanlovni n (α) usulda bo`lsa, $\beta$ tanlovni n($\beta$) usulda amalga oshirish mumkin bo`lsa va bu erda α ni ixtiyoriy tanlash usuli β ni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

n (α yoki β)

n (α yoki β) = n (α) +n (β) formula bilan topiladi.

Misol: Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin:

α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash

n (α) = 10, n (β) = 8 va n (α yoki β) = n (α) + n (β) = 10+8 = 18 ■

Ko`paytirish qoidasi

Agarda biror α tanlovni n (α) usulda, β tanlovni n (β) usulda amalga oshirish mumkin bo`lsa, u xolda «α va β) tanlovni (yoki ($\alpha;\beta$) juftlikni) amalga oshirish usullari soni n (α va β) n (α va β) = n (α) $\otimes$ n (β) formula bilan topiladi.

**Ta`rif:** n ta elementli to`plamning k ($k \leq n$) ta elementli ixtiyoriy qism to`plami n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya deyiladi va ularning soni $S_n^k$ kabi belgilanadi. Faqat elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladigan barcha qism to`plamlar bitta kombinatsiya hisoblanadi[12].

Kombinatsiyalarda elementlarning joylashish tartibi ahamiyatga ega emas va bu qism to`plamlar bir-biridan kamida bitta elementida farq qilishi kerak.

Masalan: {a,v,s} n=3 elementli to`plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar {a;v}, {a;s}, {v;s} bo`ladi. Bu erda {v;a}={a;v}, {s;a}={a;s}, {v;s}={s;v} deb hisoblanadi.

Umumiy xolda quyidagi formula o`rinli:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1)$$

Bu erda n! (n faktorial) = $1 \otimes 2 \otimes 3 \otimes \ldots\ldots \otimes n$ va 0! = 1 deb olinadi.

Misol. Beshta odamdan uchta kishidan iborat komissiyani necha xil usulda tuzish mumkin:

---

[11] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 23.

[12] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 23.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \otimes 2!} = 10 \ ■$$

**Ta`rif:** n ta elementdan iborat to`plamning elementlarini joylashish tartibini o`zgartirish natijasida hosil bo`lgan n ta elementli ixtiyoriy to`plam o`rin almashtirish deb ataladi va ularning soni R_n kabi belgilanadi.

Misol. 1) n = 2 => {a;v},{v;a}=> R_2=2

2) n = 3 =>{a;v;s},{a;s;v},{s;a;v},{v;a;s},{v;s;a},{s;v;a}=> R_3=6

Umumiy holda

$$R_n = n!$$

formula o`rinli. ■

Misol. Navbat kutib turgan 5 ta odamni R_5=5!=120 usulda navbatga joylashtirish mumkin. ■

**Ta`rif:** n ta elementli to`plamning k ta elementdan iborat qism to`plamlari bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarning joylashish tartibi bilan farq qilsa, ular n ta elementda k tadan o`rinlashtirish deb ataladi va ularning soni A_n^k kabi belgilanadi[13].

Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar. Yuqorida (1) formula orqali kiritilgan C_n^k sonlari yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2)$$

Bu tenglikda n ixtiyoriy natural son bo`lib, u maktabda o`rganiladigan $(a+b)^2$ va $(a+b)^3$ qisqa ko`paytirish formulalarini umumlashtirmasini ifodalaydi va matematikada **Nyuton binomi** (binom ikkihad degan ma`noni bildiradi), unga kiruvchi C_n^k sonlari esa **binomial koeffitsiyentlar** deb ataladi. Shuni ta`kidlab o`tish kerakki, keyinchalik (2) formula Nyuton tomonidan ixtiyoriy ratsional daraja uchun umumlashtirildi.

1. Agar (2) Nyuton binomida a=b=1 yoki a=1, b=–1 deb olsak, unda

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

tengliklar o`rinlini ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2. Agar (1) formulada k o`rniga n–k qo`yilsa yoki k=0 yoki k=n deb olinsa, unda

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \ C_n^0 = C_n^n = 1$$

tengliklar hosil bo`ladi. Ular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

**O`rinlashtirishlar.** Bir qator kombinatorik masalalar o`rinlashtirish yordamida yechiladi.

Ta`rif:** Chekli va n ta elementdan iborat to`plamdan bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va k ta elementdan iborat qism to`plamlarni hosil qilish **n ta elementdan k tadan o`rinlashtirish deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan k tadan o`rinlashtirish soni A_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati quyidagi formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, {a,b,c} to`plamdan n=3 ta elementdan k=2 tadan o`rinlashtirishlar {a;b},{a;c},{b;c},{b;a},{c;a},{c;b} bo`lib, ularning soni

[13] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 24.

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6 \cdot$$

Masala: Talaba 4 ta fan bo`yicha qo`shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo`ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin? ■

Yechish: Talabani I-IV fanlar uchun haftaning tanlagan kunlarini k=4 ta elementli X={x1, x2, x3, x4} to`plam, hafta kunlarini esa n=7 elementdan iborat H={1,2,3,…,7} to`plam singari qaraymiz. Bu holda X⊂H bo`lib, uni hosil etish n=7 ta elementdan k=4 tadan o`rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bunda elementlarning joylashish tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, {2,4,6,7} taqsimotda I fanga dushanba (2), II fanga chorshanba (4), III fanga juma (6) va IV fanga shanba(7) kunlari ajratilgan bo`ladi. Unda {4,2,6,7}, {6,4,2,7} kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840`$$

usulda taqsimlashi mumkin.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{d,e,f,g\}$ va $C=\{a,f,g,k,c\}$ to`plamlardan har ikkitasining kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.
2. Markazlari bitta nuqtada joylashgan hamda radiuslari 1 va 3ga teng doiralar nuqtalaridan iborat to`plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.
3. To`plamlarning ayirmasi bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.
4. Ushbu amallar natijalarini aniqlang: $\varnothing \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cup \{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} - \{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} - \varnothing$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\}$.
5. Ixtiyoriy A to`plam uchun $A \cup \varnothing$, $A \cap \varnothing$, $A - \varnothing$, $A - A$, $\varnothing - A$ to`plamlarni aniqlang.
6. $A - B = B - A$ tenglik o`rinli bo`ladigan A va B to`plamlarga misollar keltiring.
7. O`zaro kesishmaydigan to`plamlar bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.
8. O`zaro kesishadigan to`plamlar bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.
9. Ixtiyoriy A to`plam uchun $A \cup \overline{A} = \overline{A} \cup A = \boldsymbol{U}$ bo`lishini ko`rsating.
10. Ixtiyoriy A va B to`plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o`rinli bo`lishini ko`rsating:

a) $A \setminus B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$;

b) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ – a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing \Rightarrow A = B$;

e) $A = B \Rightarrow A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$ – d) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

f) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, ya`ni ayirish amali kesishma va to`ldirish amallari yordamida ifodalanishi mumkin;

g) $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B$.

11. Chekli A va B to`plamlar uchun $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ va $|A \cap B|$ sonlar orasidagi bog`lanishni toping.
12. Ixtiyoriy A, B va C to`plamlar uchun quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) $A \cup B \subseteq C \Rightarrow (A \subseteq C \text{ va } B \subseteq C)$;

b) $(A \subseteq C \text{ va } B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$ – a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $A \subseteq B \cap C \Rightarrow (A \subseteq B \text{ va } A \subseteq C)$;

e) $(A \subseteq B \text{ va } A \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq B \cap C$ – d) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

f) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;

g) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;

h) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;

i) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

13. 12-topshiriqning f), g), h) va i) bandlaridagi tasdiqlarga teskari tasdiqlarni tahlil qiling va ular bajarilmaydigan hollarda A, B va C to`plamlarga misol keltiring.

14. Ixtiyoriy a, b va c sonlar uchun to`g`ri bo`lgan $a \le b \Leftrightarrow a+c \le b+c$, $a \le b \Leftrightarrow a-c \le b-c$ va $a \le b \Leftrightarrow c-b \le c-a$ munosabatlardagi $a$, $b$ va $c$ sonlarni $A$, $B$ va $C$ to`plamlar bilan, “≤”, “+” va “–“ belgilarni “$\subseteq$”, “$\bigcup$” va “$\setminus$” belgilar bilan mos ravishda almashtirib, hosil bo`lgan munosabatlarning to`g`riligini tahlil qiling.

15. $B = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ 3ga bo'linadi}\}$ bo`lsin. $\boldsymbol{N}$ to`plamni universal to`plam deb hisoblab, $\overline{B}$ to`plamni toping.

16. Natural, butun, haqiqiy va irratsional sonlar to`plamlari bilan bog`liq universal to`plamlarga misollar keltiring.

17. $A = \{a, b, c, d, e\}$ to`plam uchun 2^A buleanni aniqlang.

18. Bir uyda yashovchi oilada ota (t), ona (n) va to`rt nafar farzand ($1,2,3,4$) bo`lsa, oila a`zolarining uyda bo`lishlari vaziyatlariga mos barcha imkoniyatlarni to`plamlar ko`rinishida yozing va bu imkoniyatlar to`plamlari to`plamining quvvatini aniqlang.

19. Universal to`plam tushunchasi bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.

20. Bulean tushunchasi bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.

Nazorat savollari

1. To`plamlarning birlashmasi qanday amalga oshiriladi?
2. Qanday to`plamga to`plamlarning kesishmasi deb aytiladi?
3. O`zaro kesishmaydigan to`plamlar deganda nimani tushunasiz?
4. Qanday to`plamlarga o`zaro kesishadigan to`plamlar deb aytiladi?
5. To`plamlarning ayirmasi nima?
6. A to`plamni $B$ to`plamgacha to`ldiruvchi to`plam deganda nimani tushunasiz?
7. Qanday to`plamga universal to`plam deb aytiladi?
8. Bulean deganda nimani tushunasiz?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.
2. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014.
3. Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995.

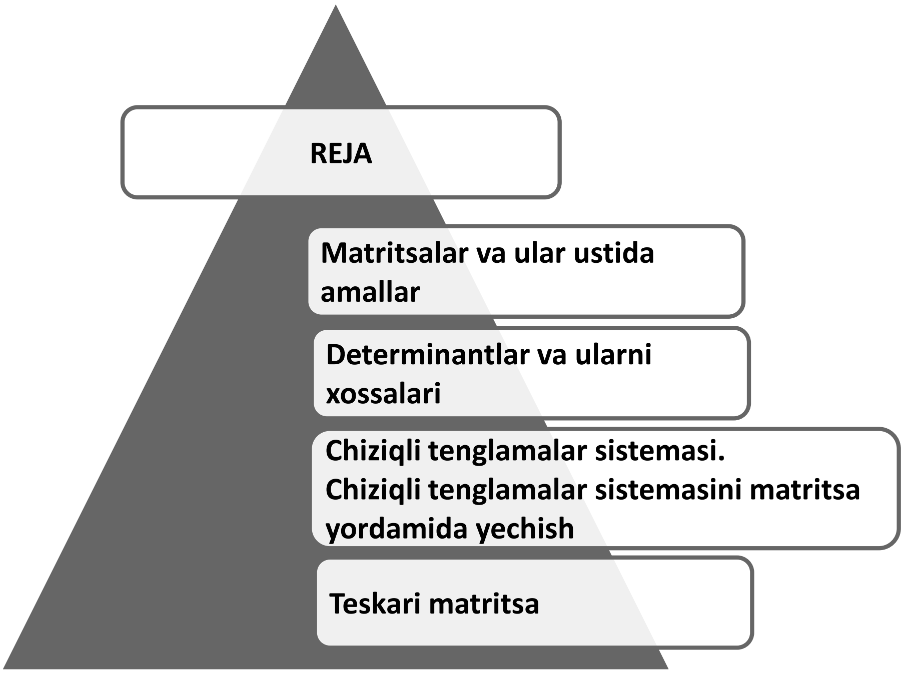
Qo`shimcha adabiyotlar

1. Soatov Yo.U. Oliy matematika, Toshkent, 1993.
2. Баврин И.И., Матросов В.Л. Общий курс высшей математики, М. «Просвещение» 1995.
3. Луре Л.И. Основы высшей математики, «Москва», 2003.
4. Курганов К.А. Варианты домашних и контролных работ по высшей математике, УзМУ, 2005.

Internet saytlari

1. https://www.math.ucdavis.edu/~linear/linear-guest.pdf
2. http://moodle.uz-djti.uz/
3. http://library.ziyonet.uz/uz
4. http://library.uz-djti.uz/

MATRITSA VA DETERMINANT TUSHUNCHALARI. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI MATRITSA USULIDA YECHISH



Tayanch iboralar: Matritsa. Diagonal matritsa. Birlik matritsa. Determinant, teskari matritsa. Matritsalarni qo`shish, ayirish, songa ko`paytirish. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Minor. Algebraik to`ldiruvchi. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

Algebra songa taalluqli turli xil masalalarni yechishni qisqartirish, soddalashtirish va ayniqsa umumlashtirish bilan shug`ullanadi.

J.L.Bertran

Matritsalar va ular ustida amallar

Ta`rif:** m ta satr va n ta ustundan iborat to`g`ri to`rtburchak shaklidagi mn ta sondan tuzilgan jadval **mxn tartibli matritsa deb ataladi[1].

Matritsalar A,B,C kabi bosh lotin harflar bilan, ularni tashkil etuvchi sonlar esa a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi belgilanadi. Bu sonlar shu matritsaning elementlari deb ataladi. Bu yerda i element joylashgan satrni, j esa ustunning tartib raqamini bildiradi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa 2x3 tartibli bo`lib, unda $a_{11}=1$, $a_{13}=1.2$, $a_{22}=7{,}5$.

Agarda A matritsaning tartibini ko`rsatishga extiyoj bo`lsa, u A_{mxn} ko`rinishda yoziladi.

Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko`p qo`llaniladigan tushuncha bo`lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko`rinishda ifodalanadi.

**Ta`rif:** $A_{mxn}$ matritsada m = n bo`lsa, u kvadrat, $m \neq n$ bo`lsa to`g`ri turtburchakli matritsa deyiladi. Bunda, agar m = 1 bo`lsa, satr matritsaga; n = 1 bo`lsa ustun matritsaga ega bo`ladi.

**Ta`rif:** A va B matritsalar teng deyiladi (A=B deb yoziladi), agarda ular bir xil tartibli va ularning mos elementlari o`zaro teng bo`lsa, ya`ni $a_{ij} = b_{ij}$ shart bajarilsa[2].

[1] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 42-43.
[2] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 44.

Masalan, A=$\begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a\div a & a\cdot a \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$

Bo`lsa, A = B deb yozish mumkin.

A={a_{ij}} matritsada a_{ii} ko`rinishdagi elementlar diagonal elementlar deyiladi.

**Ta`rif:** Barcha diagonal elementlari birga teng ($a_{ii}$=1), qolgan barcha elementlari esa nolga teng ($a_{ij}$=0, i $\neq$j) bo`lgan kvadrat matritsa birlik matritsa deyiladi va E kabi belgilanadi[3].

Masalan,

$$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

birlik matritsalardir.

**Ta`rif:** Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij}$ =0) bo`lgan matritsa nol matritsa deyiladi va 0 kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ (0\ 0\ 0\ 0)$$

u **nol matritsa** deyiladi.

Agar matritsaning yo`llar soni ustunlar soniga teng, ya`ni $m=n$ bo`lsa

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2n} \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

u n - tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Bu matritsada $a_{11}\ a_{22}\ ...a_{nn}$ elementlar **bosh diagonal elementlar** deyiladi.

Agar (1) matritsada bosh diagonal elementlardan boshqa barcha elementlar nol bo`lsa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

u **diagonal matritsa** deyiladi. Xususan bu matritsada

$$a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=1$$

bo`lsa,

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{....................} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

u **birlik matritsa** deyiladi.

A va B bir hil o`lchovli matritsalar bo`lsin. Agar A va B matritsalarning mos elementlari teng bo`lsa, A va B teng deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi[4].

A va B matritsalarning mos elementlarining yig`indisidan tashkil topgan matritsa $A$ va $B$ matritsalar yig`indisi deyiladi va $A+B$ kabi yoziladi.

[3] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 45.

[4] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 46.

A va B matritsalarning mos elementlarining ayirmasidan tashkil topgan matritsa A va B matritsalar ayirmasi deyiladi va $A-B$ kabi yoziladi.

Aytaylik, A matritsa hamda λ son berilgan bo`lsin. Bu matritsaning har bir elementini $\lambda$ songa ko`paytirishdan hosil bo`lgan matritsa $\lambda$ son bilan $A$ matritsa ko`paytmasi deyiladi va $\lambda \cdot A$ kabi belgilanadi.

Ikki A va B matritsalarning ko`paytmasi tushunchasi birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning yo`llar soniga teng bo`lgandagina kiritiladi.

Aytaylik, $m \times n$ o`lchovli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa hamda $n \times k$ o`lchovli

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12}\ \dots\ b_{1k} \\ b_{21}\ b_{22}\ \dots\ b_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}\ b_{n2}\ \dots\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo`lsin.

A matritsaning i - yo`lda joylashgan

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{in}$$

elementlarini mos ravishda B matritsaning j - ustunida joylashgan.

$$b_{1j},\ b_{2j},\ \dots,\ b_{nj}$$

ko`paytirib

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

yig`indini hosil qilamiz. Bu sonlardan tuzilgan ushbu

$$\begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \dots\ c_{1k} \\ c_{21}\ c_{22}\ \dots\ c_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{m1}\ c_{m2}\ \dots\ c_{mk} \end{pmatrix}$$

$m \times k$ o`lchovli matritsa $A$ va $B$ matritsalar ko`paytmasi deyiladi va $A \cdot B$ kabi belgilanadi.

Agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ o`lchovli kvadrat matritsa bo`lib,

$$E = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$ o`lchovli birlik matritsa bo`lsa, u holda

$$A \cdot E = EA = E$$

bo`ladi.

Ta`rif:** A kvadrat matritsani o`zaro m marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko`paytirish natijasida hosil bo`lgan kvadrat matritsa A **matritsaning m-darajasi deyiladi.

A matritsaning m-darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0=E$ va $A^1=A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta`rifdan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m,k-natural sonlar, λ-haqiqiy son):

$$1.\, A^m \cdot A^k = A^{m+k}\ ; \quad 2.\, (A^m)^k = A^{mk}\ ; \quad 3.\, (\lambda A)^m = \lambda^m A^m\ ;$$

$$4.\, E^m = E; \quad 5.\, \mathrm{O}^m = \mathrm{O}.$$

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko`tarish amalini kiritish mumkin ekan. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 60\\ 12 & -47\end{pmatrix}.$$

Shuni ta`kidlab o`tish kerakki, 5-xossaning teskarisi o`rinli emas, ya`ni $A^m=\mathrm{O}$ tenglikdan har doim ham A=O ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \neq \mathrm{O} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{O}.$$

Kelgusida matritsani darajaga ko`tarish amalini ixtiyoriy m butun son uchun umumlashtiramiz.

**Ta`rif:** $B=(b_{ij})$ matritsa $A=(a_{ij})$ **matritsaning transponirlangani** deyiladi, agar i va j indekslarning barcha mumkin bo`lgan qiymatlarida $a_{ij}=b_{ji}$ shart bajarilsa.

A matritsaning transponirlangani A^T kabi belgilanadi. Agar A matritsa m×n tartibli bo`lsa, uning transponirlangani $A^T$ n×m tartibli bo`ladi. Masalan,

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T_{3\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlanganini topish **transponirlash amali** deyiladi va u quyidagi xossalarga ega bo`lishini ko`rsatish mumkin:

1. $(A^T)^T=A$; 2. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ (λ– ixtiyoriy haqiqiy son);

3. $(A\pm B)^T= A^T\pm B^T$; 4. $(A\cdot B)^T= B^T\cdot A^T$.

Ta`rif:** Agar A kvadrat matritsa uchun $A^T=A$ bo`lsa, u **simmetrik matritsa, $A^T= -A$ bo`lganda esa **kososimmetrik matritsa** deb ataladi.

Ta`rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij}= a_{ji}$ , kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij}=- a_{ji}$ shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo`lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 6 & 0 & -4\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ -3 & 0 & -4\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

matritsalardan A simmetrik, B kososimmetrik bo`ladi.

Determinantlar va ularni xossalari

Ixtiyoriy $n \times n$ o`lchovli kvadrat matritsa

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn}\end{pmatrix}$$

ning elementlaridan tuzilgan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{vmatrix}$$

ifoda (matritsa kabi n ta yo`l va $n$ ta ustunga ega bo`lgan ifoda) A matritsaning n-tartibli determinanti deyiladi va $\det A$ (yoki $|A|$, yoki Δ kabi belgilanadi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Matritsa elementi determinantning ham elementi deyiladi[5].

Masalan, $n=1$ bo`lganda

$A=(a_{11})$ bo`lib, $\det A = a_{11}$;

$n=2$ bo`lganda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bo`lib,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \quad (2)$$

$n=3$ bo`lganda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bo`lib,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (3)$$

bo`ladi.

Odatda (2) va (3) mos ravishda ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar deyiladi. Demak, determinantlar sonlarni ifodalaydi.

Determinantlar quyidagi xossalarga ega:

1) Determinantning biror yo`li (ustuni) faqat nollardan iborat bo`lsa, determinantning qiymati nolga teng bo`ladi.

2) Agar determinantning ikki yo`li (ikki ustuni) dagi elementlari proporsional bo`lsa, determinantning qiymati 0 ga teng bo`ladi.

3) Agar determinantning biror yo`li (ustuni) biror o`zgarmas songa ko`paytirilsa, determinantning qiymati ham $k$ ga ko`payadi.

4) Agar determinantning ikki yo`li (ikki ustuni) o`rinlarini almashtirilsa, determinant ishorasini o`zgartiradi.

---

[5] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 50.

5) Agar determinantning bir yo`lini (ustunini) o`zgarmas songa ko`paytirib, uni boshqa yo`liga (ustuniga) qo`shilsa, determinantning qiymati o`zgarmaydi.

Faraz qilaylik, biror

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinant berilgan bo`lsin. Bu determinantning biror $a_{ik}$ $(i=1,2,3; \quad k=1,2,3)$ elementini olib, shu element joylashgan yo`lni hamda ustunni o`chiramiz. Ravshanki, qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Bu determinantga a_{ik} elementning minori deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Ushbu

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

miqdor a_{ik} elementning algebraik to`ldiruvchisi deyiladi.

Teorema. Determinantning biror yo`lida joylashgan barcha elementlarning ularga mos algebraik to`ldiruvchilari bilan ko`paytmasidan tashkil topgan yig`indi shu determinantning qiymatiga teng bo`ladi[6].

Iikkinchi tartibli determinant, ta`rifga ko`ra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bo`ladi.

Uchinchi tartibli determinant, ta`rifga ko`ra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

bo`ladi. Bu tenglikda qatnashgan ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblab topamiz:

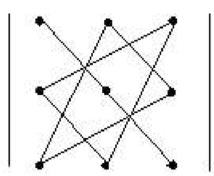
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{31}\right) +$$

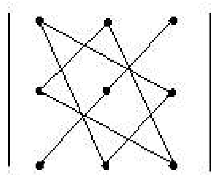
$$+a_{13}\left(a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta had yig`indisidan iborat bo`lib, ularning uchtasi musbat ishorali, uchtasi manfiy ishorali bo`ladi.

Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo`ladi,





$+$ $\qquad\qquad$ $-$.

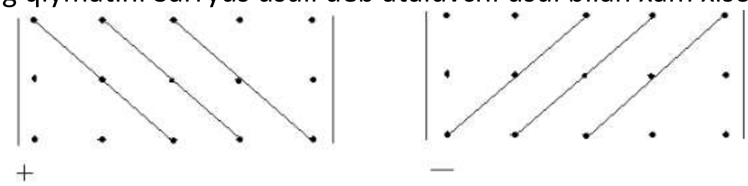
Agar uchinchi tartibli determinantni quyidagi ko`rinishda yozib olsak

---

[6] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014. – B. 54.

$$a_{11}a_{12}a_{13}a_{11}a_{12}$$
$$a_{21}a_{22}a_{23}a_{21}a_{22}$$
$$a_{31}a_{32}a_{33}a_{31}a_{32}$$

determinantning qiymatini Sarryus usuli deb ataluvchi usul bilan xam xisoblash mumkin;



Misol. Ushbu

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determinant hisoblansin.

◀Bu determinantni hisoblashda (3) formula va keltirilgan sxemadan foydalanamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot9 + 3\cdot1\cdot6 + 7\cdot5\cdot8 - 7\cdot4\cdot6 - 3\cdot5\cdot9 - 2\cdot1\cdot8 =$$

$$= 72 + 18 + 280 - 168 - 135 - 16 = 51.$$ ▶

Misol. Ushbu

$$\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

tenglama echilsin.

◀(2) formulaga ko`ra

$$(x+3)(x-1) - (x-1)(7-x) = 0$$

bo`ladi. Keyingi tenglama

$$(x-1)(2x-4) = 0$$

ko`rinishga kelib, undan $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$ bo`lishi kelib chiqadi.▶

Misol. Keltrilgan teoremadan foydalanib ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

determinant hisoblansin.

◀Yuqoridagi teoremani berilgan determinantning ikkinchi yo`liga nisbatan tatbiq etib topamiz:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 8.$$

Demak, $\Delta = 8$.▶

Misol. Ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

to`rtinchi tartibli determinantni teoremadan foydalanib ikkinchi ustun bo`yicha yoyilsin.

◀Teoremadan foydalanib topamiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \blacktriangleright$$

1-xossa. Agar determinantda biror satr faqat nollardan iborat bo`lsa, uning qiymati nolga teng bo`ladi.

Bu xossaning isboti oldingi xossadan λ=0 bo`lgan holda kelib chiqadi.

Masalan, quyidagi III tartibli determinantning qiymatini (3) formula bilan hisoblab o`tirmay, 1-xossaga asosan to`g`ridan-to`g`ri

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

deb ta`kidlay olamiz.

2-xossa. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr elementlari o`zaro proporsional bo`lsa, uning qiymati nolga teng bo`ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Isbot: 2-xossaga asosan λ proporsionallik koeffitsiyentini determinant belgisi oldiga umumiy ko`paytuvchi sifatida chiqarish mumkin. Bu holda ikkita satri bir xil bo`lgan determinant hosil bo`ladi va uning qiymati, 3-xossaga asosan, nolga teng. Bundan berilgan determinantning ham qiymati nol ekanligi kelib chiqadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix} = 0,$$

chunki bu determinantda I va III satrlar proporsional va proporsionallik koeffitsiyenti λ=1.5 ga teng.

3-xossa. Agar determinantning biror i-satri ikkita qo`shiluvchi yig`indisidan iborat, ya`ni $a_{ij}+ b_{ij}$ ko`rinishda bo`lsa, bu determinantni ikkita determinantlar yig`indisi ko`rinishida yozish mumkin. Bunda bu determinantlarning i-satri mos ravishda $a_{ij}$ va $b_{ij}$ elementlardan iborat bo`lib, qolgan satrlari berilgan determinantniki singari bo`ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu xossaning o`rinli ekanligiga bevosita (2) formula orqali ishonch hosil qilish mumkin.

4-xossa. Agar |A| determinantning a_{ii} diagonal elementlaridan yuqorida yoki pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng bo`lsa, uning qiymati diagonal elementlar ko`paytmasiga teng bo`ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Isbot: Bu determinantlar uchun ularni (2) hisoblash formulasidagi $a_{11}a_{22}a_{33}$ qo`shiluvchidan boshqa hamma qo`shiluvchilari nolga teng bo`ladi va shuning uchun ularning yig`indisi, ya`ni determinantning qiymati shu ko`paytmaga teng bo`ladi.

Masalan, ushbu IV tartibli determinantni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 5\cdot 2\cdot(-1) = 30.$$

5-xossa. Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko`paytmasiga teng bo`ladi.

Bu xossa isboti bevosita oldingi xossadan kelib chiqadi. Jumladan har qanday birlik matritsaning determinanti birga tengdir.

Navbatdagi xossani ifodalash uchun ikkita yangi tushuncha kiritamiz.

**Ta`rif:** Ixtiyoriy n-tartibli determinantning $a_{ij}$ (i,j=1,2, … , n) elementining minori deb bu determinantdan shu element joylashgan i-satr va j- ustunni o`chirishdan hosil bo`lgan (n–1)-tartibli determinant qiymatiga aytiladi.

Determinantning a_{ij} elementining minori M_{ij} deb belgilanadi va ularning soni n^2 ta bo`ladi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

determinantning II satr elementlarining minorlarini yozamiz va hisoblaymiz:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Bunda III tartibli determinantning minorlari II tartibli determinantlar ekanligini yana bir marta ta`kidlab o`tamiz.

**Ta`rif:** Ixtiyoriy n-tartibli determinantning $a_{ij}$ (i,j=1,2, … , n) elementining algebraik to`ldiruvchisi deb $(-1)^{i+j} M_{ij}$ kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

Determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining algebraik to`ldiruvchisi $A_{ij}$ kabi belgilanadi va, ta`rifga asosan,

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i+j \text{ - juft bo'lsa;} \\ -M_{ij}, & i+j \text{ - toq bo'lsa.} \end{cases}$$

formula bilan hisoblanadi. Masalan, (3) determinantning II satr elementlarining algebraik to`ldiruvchilari quyidagicha bo`ladi:

$A_{21} = -M_{21}=1$, $A_{22} = M_{22}=1$, $A_{23} = -M_{23}=2$ (5)

6-xossa (Laplas teoremasi). Determinantning ixtiyoriy bir i-satrida joylashgan a_{ij} (j=1,2, … , n) elementlarini ularning A_{ij} (j=1,2, … , n) algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytmalarining yig`indisi shu determinantning qiymatiga teng bo`ladi.

Isbot: Bu xossa III tartibli |A| determinantning birinchi satri uchun quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A| \quad (6)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun algebraik to`ldiruvchi ta`rifidan va determinantlarni hisoblashning (1), (2) formulalaridan quyidagicha foydalanamiz:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = |A|.$$

Xuddi shunday tarzda determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari uchun

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A| \quad (7)$$

tengliklar o`rinli bo`lishi isbotlanadi.

Ta`rif:** Yuqoridagi (5) va (6) tengliklar determinantning **satrlar bo`yicha yoyilmasi deb ataladi.

Shunga o`xshash determinantning ustunlar bo`yicha yoyilmasini ham quyidagicha yozish mumkin:

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = |A|, \qquad a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|,$$
$$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = |A|. \quad (8)$$

Masalan, yuqorida keltirilgan (3) determinant qiymatini uning II satrining (4) algebraik to`ldiruvchilari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta = 2A_{21} + (-3)A_{22} + 7A_{23} = 2\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 7\cdot 2 = 13.$$

Laplas teoremasidan foydalanib yuqori tartibli determinantlarni hisoblash mumkin. Bunda n-tartibli determinantni hisoblash n ta (n–1) - tartibli determinantni (A_{ij} algebraik to`ldiruvchilarni) hisoblash va uning ixtiyoriy satr yoki ustuni bo`yicha yoyilmasidan foydalanishga keltiriladi. Jumladan, I tartibli determinant qiymati $|A|=|a_{11}|=a_{11}$ ekanligidan foydalanib, (1) va (2) formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Determinant qiymatini Laplas teoremasi yordamida hisoblash uchun uning ixtiyoriy satr yoki ustun bo`yicha yoyilmasidan foydalanish mumkin. Ammo, amaliy nuqtai nazardan, ko`proq elementlari nolga teng bo`lgan satr yoki ustunni tanlash (agar shundaylar mavjud bo`lsa) maqsadga muvofiqdir. Bu holda nolga teng elementlarning algebraik to`ldiruvchilarini topishga hojat bo`lmaydi va hisoblashlar hajmi ancha kamayadi.

Misol. Ushbu IV tartibli determinantni hisoblang:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish: Bu determinantni II ustun bo`yicha yoyilmasidan foydalanib hisoblash qulaydir. Bunga sabab shuki, bu ustunda nol elementlar boshqa satr va ustunlarga qaraganda ko`proq hamda $a_{22}=0$, $a_{42}=0$ elementlarning A_{22}, A_{42} algebraik to`ldiruvchilarini hisoblash shart emas.

Dastlab A_{12} va A_{32} algebraik to`ldiruvchilarni hisoblab, A_{12} =–389 va A_{32}=45 ekanligini aniqlaymiz. Endi determinant qiymatini II ustunga Laplas teoremasini tatbiq etib hisoblaymiz:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} =$$
$$= (-3)\cdot(-389) + 0\cdot A_{22} + 7\cdot 45 + 0\cdot A_{42} = 1482.$$

7-xossa. Agar |A| determinantni biror i-satrining algebraik to`ldiruvchilari $A_{ij}$ (j=1,2, … , n) va $b_j$ (j=1,2, … , n) ixtiyoriy sonlar bo`lsa, unda

$$b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + b_3A_{i3} + \cdots + b_nA_{in} = |B|$$

tenglik o`rinli bo`ladi. Bunda |B| determinant |A| determinantdan faqat i-satri bilan farq qilib, uning i-satri b_j (j=1,2, … , n) sonlardan tashkil topgan bo`ladi.

Isbot: Bu xossa isbotini III tartibli |A| determinantning , masalan, birinchi satri uchun keltiramiz. Bu holda

$$b_1A_{12} + b_2A_{12} + b_3A_{13} = |B|$$

yig`indining qo`shiluvchilari |A| determinantning birinchi satr bo`yicha yoyilmasini ifodalovchi

$$a_1A_{11} + a_1A_{12} + a_3A_{13} = |A|$$

yig`indi qo`shiluvchilaridan faqat birinchi ko`paytuvchilari, ya`ni birinchi satr elementlari bilan farq qiladi. Shu sababli |A|, |B| determinantlar bir-biridan faqat birinchi satri bilan farq qiladi va |B| determinantning birinchi satri b_1, b_2 va b_3 sonlardan iborat bo`ladi.

Masalan, A_{11}, A_{12} va A_{13}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satri elementlarining algebraik to`ldiruvchilari bo`lsa, unda

$$11A_{11} + 12A_{12} + 13A_{13} = |B| = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}.$$

8-xossa. Agar |A| determinantni biror i-satrining a_{ij} (j=1,2, … , n) elementlari boshqa bir k-satr (i≠k) mos elementlarining A_{kj} (j=1,2, … , n) algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytirilgan bo`lsa, bu ko`paytmalar yig`indisi nolga teng bo`ladi.

Isbot: Oldingi xossada $b_j = a_{ij}$ (j=1,2, … , n) deb olsak, unda

$$b_1A_{k1} + b_2A_{k2} + b_3A_{k3} + \cdots + b_nA_{kn} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |B|$$

Bu yerda |B| determinant berilgan |A| determinantning k-satriga i-satrining a_{ij} elementlarini qo`yish bilan hosil qilinadi. Shu sababli |B| determinantning i-satri va k-satri bir xil bo`lib, 3-xossaga asosan uning qiymati nolga teng bo`ladi, ya`ni

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i,k = 1,2,\cdots,n; \quad i \neq k. \quad (9)$$

9-xossa. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo`lsa ularning ko`paytmasining determinanti har birining determinantlari ko`paytmasiga teng bo`ladi, ya`ni |A·B|=|A|·|B| tenglik o`rinlidir.

Bu xossani isbotsiz keltiramiz.

Ko`rib o`tilgan bu xossalar determinantlarni hisoblash va ularning turli tatbiqlarida qo`llaniladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli

Soddalik uchun uch noma`lumli uchta chiziqli tenglamadan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (10)$$

sistemani qaraymiz. Sistema uchta x, y va z noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsientlari, b_1, b_2 va b_3 sonlar ozod hadlar deyiladi[7]. Bu sistemaning koeffitsientlaridan quyidagi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni hosil qilamiz. So`ng bu determinantning birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quyidagi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Demak, (8) sistema berilgan holda har doim $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarga ega bo`lamiz.

3-teorema. Agar

1) $\Delta \neq 0$ bo`lsa, u holda (4) sistema yagona $(x, y, z)$ yechimga ega bo`lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (11)$$

bo`ladi;

2) $\Delta = 0$ bo`lib, $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$ bo`lsa, u holda (4) sistema yechimga ega bo`lmaydi;

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo`lsa, u holda (4) sistema cheksiz ko`p yechimga ega bo`ladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ x + y + 2z = 7, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi echilsin.

◄Avvalo sistema koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 1 - (-2) - (-4) - 3 = 18.$$

Demak, berilgan sistema yagona yechim ega. Endi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarni xisoblaymiz:

[7] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 98.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}5&3&-1\\7&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=5+6+7-(-1)-(-10)-21=8,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&5&-1\\1&7&2\\2&1&1\end{vmatrix}=14+20-1-(-14)-4-5=38,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&3&5\\1&1&7\\2&-1&1\end{vmatrix}=2+42-5-10-(-14)-3=40\cdot$$

Unda

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{38}{18}=\frac{19}{9}$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{40}{18}=\frac{20}{9}$$

bo`ladi. ►

Yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasining yechimini topish usuli Kramer usuli deyiladi.

Teskari matritsa

A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb **A×V=V×A=E** shartni qanoatlantiruvchi V matritsaga aytiladi. A matritsaga teskari matritsa odatda A^{-1} kabi belgilanadi.

Har qanday kvadrat matritsaga teskari matritsa mavjudmi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

A kvadrat matritsaga teskari A matritsa mavjud bo`lishi uchun A matritsaning xosmas matritsa bo`lishi zarur va yetarlidir[8].

Isboti. Zarurligi. Faraz qilaylik A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo`lsin.

U holda **$A\times A^{-1}=E$, $A \times A^{-1} = E = 1$** bo`ladi. Bundan **$A \neq 0$**, ya`ni A matritsaning xosmasligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Osonlik uchun uchinchi tartibli

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

xosmas matritsani qaraymiz. Bu holda

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

matritsa A matritsaga teskari matritsa ekanligiga bevosita ularni ko`paytirish yo`li bilan ishonch hosil qilish mumkin. Ko`paytirish jarayonida determinantning 7- va 8- xossalaridan foydalaniladi. Bu yerda Aik(i,k=1,2,3) orqali aik elementning algebraik to`ldiruvchisi belgilangan.

[8] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014. – B. 77.

Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsa topilsin.

Yechish:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satr elementlarini uchinchi satrining mos elementlariga qo`shsak

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

bo`ladi. Buni uchinchi ustun elementlari bo`yicha yoyib hisoblaymiz.

$$|A|=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-13\neq 0.$$

Demak berilgan matritsa xosmas matritsa va unga teskari A-1matritsa mavjud.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=2, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3, \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=14$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-5, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-9,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3, \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Topilgan qiymatlarni qo`yib teskari matritsani aniqlaymiz.

$$A^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{14}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

$A\times A^{-1}=E$ tenglik o`rinli ekanini tekshirib ko`rishni o`quvchiga tavsiya etamiz.

A matritsa va unga teskari A-1 matritsaning determinantlari uchun

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

ekanini ta`kidlab o`tamiz.

Nazorat savollari

1. Ikkinchi tartibli deteremenatlarga ta`rif bering.
2. Uchinchi tartibli deteremenatlarga ta`rif bering.
3. Nol matritsaga ta`rif bering.
4. Birlik matritsaga ta`rif bering.
5. Diagonal matritsaga ta`rif bering.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.
2. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014.
3. Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995.

Qo`shimcha adabiyotlar

1. Soatov Yo.U. Oliy matematika, Toshkent, 1993.
2. Баврин И.И., Матросов В.Л. Общий курс высшей математики, М. «Просвещение» 1995.
3. Курганов К.А. Варианты домашних и контролных работ по высшей математике, УзМУ, 2005.

Internet saytlari

1. http://moodle.uz-djti.uz/
2. http://library.ziyonet.uz/uz
3. http://library.uz-djti.uz/
4. http://lib.mexmat.ru/allbooks.php?page=1

VEKTORLAR ALGEBRASI TUSHUNCHA VA ASOSLARI. VEKTORLAR USTIDA AMALLAR. DEKART KOORDINATALAR SISTEMASIDA VEKTORLAR

REJA

- **Vektor tushunchasi**
- **Vektorlar ustida amallar**
- **Vektorlarni qo`shish va ayirish**
- **Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar**
- **Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi**
- **Topshiriqlar**

Tayanch iboralar: Vektor. Vektorning uzunligi. Vektorning o`qqa proeksiyasi. Vektorlarni qo`shish va ayirish. Vektorlarni songa ko`paytirish. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar. Vektorlarning kolleniarlik sharti. Vektorlarni bazis koordinatalari. Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi. Ikki vektorning vektor ko`paytmasi.

V.G.Petrova

XVII-XVIII asr matematiklarining geometrik masalalarga bog`liq ishlarida sonlar hisobiga o`xshash va koordinatalar sistemasi bilan bog`liq geometrik hisobga ehtiyoj paydo bo`ldi. Bu ehtiyoj g`oyalari XVIII asr oxirida Karno tomonidan kiritilgan vektorial algebra orqali qondirildi.

Vektor tushunchasi

Skalyar miqdor deb faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklarga aytiladi. Masalan: uzunlik, vaqt, hajm, yuza va boshqalar. Shunday miqdorlar ham borki, ular o`zlarining son qiymatlari bilan to`la aniqlanmaydi; ularni to`liq aniqlash uchun son qiymatlari bilan bir qatorda yo`nalishlari ham berilgan bo`lishi kerak. Masalan, harakat, kuch, tezlik, tezlanish kabi miqdorlar. To`g`ri chiziqda oddiy kesma bilan bir qatorda yo`nalgan kesma, ya`ni bir uchi uning boshi, ikkinchi uchi uning oxiri hisoblangan kesmaga qaraladi. Bunday kesma **vektor** deyiladi. Oddiy kesmada esa aniqlovchi nuqtalar teng huquqli bo`lib tartibining ahamiyati yo`q.

Boshlang`ich nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo`lgan vektor $\vec{AB}$ yoki qisqacha $\vec{a}$ shaklida belgilanadi. Shunday qilib, vektor miqdor geometrik usulda ma`lum uzunlikdagi va aniq yo`nalishdagi kesma yordamida tasvirlanadi:

$$A \xrightarrow{\vec{AB}=\vec{a}} B$$

Vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\vec{AB}|=|\vec{a}|$ ko`rinishida belgilanadi[1]. Moduli nolga teng vektor nol vektor, moduli birga teng bo`lgan vektor birlik vektor deyiladi. Nol vektorining yo`nalishi aniqlanmagan bo`ladi.

**Ta`rif:** Noldan farqli vektorlar bir to`g`ri chiziqda yoki parallel to`g`ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi[2].

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo`lsa $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ ko`rinishda belgilanadi.

[1] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014. – B. 93.
[2] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 82-83.

Uzunliklari teng, kollinear va bir xil yo`nalishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi belgilanadi.

Ta`rif: Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan vektorlarga **komplanar vektorlar** deb ataladi.

Vektorlar ustida amallar

Vektorlarni qo`shish

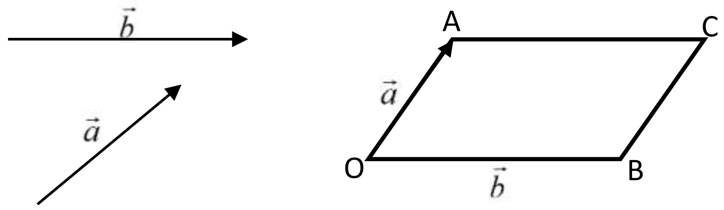
Ta`rif: Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning yig`indisi deb istalgan A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo`yib, uning oxirida B ga $\vec{b}$ vektorni qo`yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C nuqtada bo`lgan $\vec{AC}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}$ bilan belgilanadi.

Vektorlarni qo`shish ta`rifidan istalgan A, B, C nuqtalar uchun $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ (1) tenglik o`rinli bo`lishi kelib chiqadi.

(1) – tenglik vektorlarni qo`shishning uchburchak qoidasi deyiladi.

Undan tashqari vektorlarni parallelogramm qoidasiga asosan ham qo`shish mumkin. Buning uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o`z-o`ziga parallel ravishda bitta boshga ko`chiriladi va ularga parallelogramm yasaladi. Parallelogrammning katta diagonali shu ikki vektorning yig`indisidan, kichik diagonali esa ularning ayirmasidan iborat.

$$\vec{OC}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{OA}+\vec{OB}$$
$$\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{OA}-\vec{OB}$$



Vektorlarni qo`shishning xossalari.

a) Qo`shishning gruppalash (assosiativlik) xossasi.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

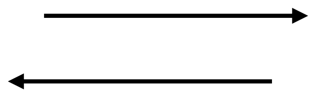
b) Qo`shishning o`rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Agar $\vec{a}+\vec{b}=0$ bo`lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga o`zaro qarama-qarshi vektorlar deyiladi. Qarama-qarshi vektorlar modul jihatidan teng, yo`nalish jihatidan esa qarama-qarshi bo`ladi[3].

$\vec{a}$ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni

$\vec{b}$ $\vec{a}$ $\vec{b}$ $-\vec{a}$ bilan belgilaymiz.



Vektorni songa ko`paytirish

$\vec{a}\neq 0$ vektor va λ son berilgan bo`lsin, bu yerda λ∈ N.

Ta`rif: $\vec{a}$ vektorning λ soniga ko`paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektoriga aytiladiki, λ>0 bo`lganda $\vec{b}$ ning yo`nalishi $\vec{a}$ ning yo`nalishi bilan bir xil, λ<0 bo`lsa, $\vec{b}$ ning yo`nalishi teskari bo`lib, $\vec{b}$ vektorning uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan λ son moduli ko`paytmasiga teng va $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ shaklida belgilanadi.

Ta`rifdan ushbu xulosalar kelib chiqadi:

a) Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$;

[3] Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 56.

b) Ixtiyoriy $\lambda \in R$ son uchun $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda a$

v) Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \ -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$

g) $\vec{a}$ va $\lambda \cdot \vec{a}$ vektorlar o`zaro kollineardir.

Vektorni songa ko`paytirish quyidagi xossalarga ega:

a) $a(\beta\vec{a}) = (a\beta)\vec{a}$ (gruppalash qonuni);

b) $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (vektorlarni qo`shishga nisbatan taqsimot qonuni)

v) $(a + \beta)\vec{a} = a\vec{a} + \beta\vec{a}$ (skalyarni qo`shishga nisbatan taqsimot qonuni)[4].

Chiziqli kombinatsiya. Ba`zis

Bizga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ vektorlar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ haqiqiy sonlar berilgan bo`lsin.

Ta`rif: $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k$ ifoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiya deyiladi[5].

Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ koeffisiyenti chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalangan bo`lsa, $\vec{a}$ vektor shu vektorlar bo`yicha yoyilgan deyiladi, ya`ni quyidagi tenglik o`rinli bo`ladi:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k \quad (2)$$

Agar kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sonlar ma`lum tartibda tanlab olinganda

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \quad (3)$$

tenglik bajarilsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ vektorlar chiziqli bog`liq deyiladi. Agar (3) munosabat faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ da o`rinli bo`lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 ...$ vektorlar chiziqli bog`lanmagan deyiladi yoki chiziqli erkli deyiladi. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo`lsa ular chiziqli bog`liq bo`ladi. Uchta vektor chiziqli bog`liq bo`lishi uchun ularning komplanar bo`lishi zarur va yetarlidir.

Ma`lum tartibda olingan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...., \vec{e}_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo`lib, boshqa har qanday vektorni $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ lar orqali chiziqli ifodalansa bu vektorlar sistemasi bazis deyiladi va $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k\}$ ko`rinishda belgilanadi. Agar bazisning har bir vektori birlik vektor bo`lib, ularning har ikkitasi o`zaro perpendikulyar bo`lsa, bunday bazis ortonormallangan bazis deyiladi. Bazis tashkil etuvchi vektorlar soni qaralayotgan fazoning o`lchovi deyiladi. Istalgan $\vec{a}$ vektorni berilgan $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...., \vec{e}_k\}$ bazis vektorlar bo`yicha yoyish mumkin:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad (4)$$

yoyilmadagi $a_1, a_2 \ a_3$ sonlar $\vec{a}$ vektorning $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ \vec{e}_3\}$ ortonormal bazisiga nisbatan koordinatalari deyiladi. Bu qisqacha $\vec{a} = \{a_1, a_2, \ a_3\}$ ko`rinishida belgilanadi[6].

Vektorlar orasidagi burchak. Vektorlarning o`qdagi proyeksiyasi

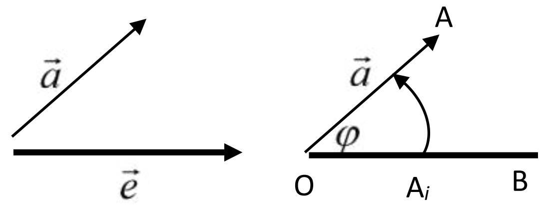
Ikki vektor hamda vektor va o`q orasidagi burchak tushunchalarini kiritamiz. Aytaylik $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo`lsin. Bu vektorlar boshini biror O nuqtaga joylashtiramiz, boshqacha aytganda $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OB} = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.

[4] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 85-86.
[5] Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 57.
[6] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 88.

U holda ΔAOB ning ichki AOB burchagi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deyiladi hamda $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})$ ko`rinishda yoki $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ harflar bilan belgilanadi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb, vektorlardan birini soat strelkasiga teskari yo`nalishda ikkinchi vektor bilan ustma-ust tushguncha aylantirishdan hosil bo`lgan burchaklarning kichigiga aytiladi. Vektorlar orasidagi burchak, $0^0$ dan $180^0$ gacha oraliqda bo`ladi. Bundan ko`rinadiki bir xil yo`nalishdagi kollinear vektorlar orasidagi burchak 0^0ga, qarama-qarshi yo`nalishdagi kollinear vektorlar orasidagi burchak esa $180^0$ ga teng bo`ladi. Agar vektorlar orasidagi burchak 90^0 ga teng bo`lsa, ular perpendikulyar yoki ortogonal vektorlar deyiladi va $\vec{a} \perp \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, 1 o`q va uning birlik vektori $\vec{e}$ berilgan bo`lsin. Ixtiyoriy $\vec{a} \neq 0$ vektorning birlik vektori $\vec{a}$ quyidagicha aniqlanadi: $\alpha_0 = \vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$. $\vec{\alpha} \neq 0$ tekislikdagi ixtiyoriy vektor bo`lsin. $\vec{\alpha}$ vektor bilan 1 o`q orasidagi burchak deganda, 1 o`qning birlik vektori $\vec{e}$ bilan $\vec{\alpha}$ vektor orasidagi burchak tushuniladi. $\vec{\alpha}$ vektor 1 o`q bilan φ burchak tashkil qilsin[7].

**Ta`rif:** Vektorlarning o`qdagi ortogonal proyeksiyasi deb vektor uzunligini shu vektor bilan o`q orasidagi burchak kosinusiga ko`paytmasiga teng songa aytiladi[8].



$\vec{\alpha}$ vektorning 1 o`qdagi proyeksiyasi $\Pi p_i\vec{a}$ ko`rinishda belgilanadi. Ta`rifdan:

$$\Pi p_e\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$$

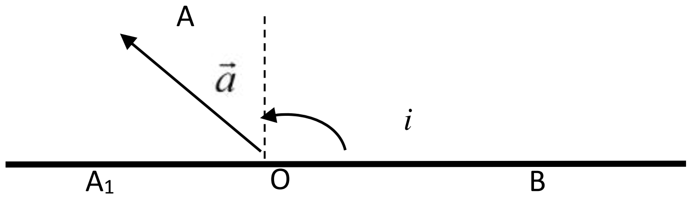
$\vec{\alpha}$ vektorni bu o`qdagi ortogonal proyeksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$OA_1 = \Pi P_i\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|\cos\varphi = OA_i$$

Bu yerda $\varphi = (\vec{e}, \vec{\alpha}), A_1$ nuqta A nuqtaning 1 to`g`ri chiziqdagi proyeksiyasi.

Agar $\vec{\alpha}$ va $\vec{e}$ vektorlar orasidagi burchak o`tmas bo`lsa

$$\Pi p_\ell\vec{\alpha} = -|\vec{\alpha}|\cos(\angle BOA) = -|\vec{\alpha}|\cos(\angle A\ OA_1) = -OA_1$$



Agar $\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{t} = 90^0$ bo`lsa $(\vec{a} \perp \vec{e})$, $\Pi p_i\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|\cos 90^0 = 0$. Ixtiyoriy $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun

$$\Pi p_i(\vec{b} + \vec{c}) = \Pi p_i\vec{b} + \Pi p_i\vec{c} \quad (4)$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo`shish va ayrish

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\mathrm{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazisga nisbatan quyidagi koordinatalarga ega bo`lsin: $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$; $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$.

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo`shishda (ayirishda) ularning mos koordinatalari qo`shiladi (ayriladi):

---

[7] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 89.
[8] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014. – B. 94.

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)+(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=(a_1+b_1)\vec{e}_1+(a_2+b_2)\vec{e}_2+(a_3+b_3)\vec{e}_3$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)-(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=(a_1-b_1)\vec{e}_1+(a_2-b_2)\vec{e}_2+(a_3-b_3)\vec{e}_3$$

2) Vektorni songa ko`paytirishda uning barcha koordinatalari shu songa ko`paytiriladi.

$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ bo`lsin. U holda $\lambda\vec{a}=\lambda(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)=$ $=(\lambda a_1)\vec{e}_1+(\lambda a_2)\vec{e}_2+(\lambda a_3)\vec{e}_3$ ga ega bo`lamiz.

Misol. $\vec{a}=\{3;-2;1\}$; $\vec{b}=\{0;3;-2\}$ $\vec{c}=\{1;0;5\}$ bo`lsa a) $\vec{a}+\vec{b}$, b) $\vec{a}+\vec{c}$, s) $5\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlanadi.

a) $\vec{a}+\vec{b}=\{3+0;\ -2+3;\ 1-2\}=\{3;\ 1;\ -1\}$.

b) $\vec{a}+\vec{c}=\{3-1;\ 2-0;\ 1-5\}=\{2;\ -2;\ -4\}$.

s) $5\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\{15+0-3;\ -10+6-0;\ 5-4-15\}=\{12;\ -4;\ -14\}$.

Vektorlarning skalyar ko`paytmasi

Ta`rif:** Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko`paytmasidan hosil bo`lgan son shu **vektorlarning skalyar ko`paytmasi deyiladi[9].

Skalyar ko`paytma $\vec{a}*\vec{b}$ ko`rinishda belgilanadi:

Demak, $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\varphi,\ \varphi=\vec{a}\hat{\ }\vec{b}$ (8)

(8) formula fizikada o`zgarmas $\vec{F}$ kuchning boshlang`ich B nuqtadan C nuqtagacha to`g`ri chiziqli harakati davomida bajargan ishi $A=|\vec{F}|*|\vec{BC}|*\cos\varphi$ ni ifodalaydi.

Misol. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$ hamda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi 135^0$ ga teng bo`lsa, $\vec{a}*\vec{b}$ skalyar ko`paytma topilsin.

Yechish:

$$\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\varphi=2*3*\cos 135^0=6*\cos(90^0+45^0)=-6*\sin 45^0=-6*\sqrt{2}/2=-3\sqrt{2}.$$

Xossalari.

1. $\vec{a}*\vec{b}=\vec{b}*\vec{a}$ (9)
2. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}*\vec{b})$ (10)
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}$ (11)
4. $\vec{a}*\vec{a}=|\vec{a}|^2$ (12)
5. Ortonormallangan $\mathrm{E}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ bazis uchun

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j\end{cases}\qquad i,j=\overline{1,2,3}.$$

Teorema. Nol bo`lmagan ikkita vektorning skalyar ko`paytmasi nolga teng bo`lsa, bu vektorlar o`zaro perpendikulyar bo`ladi va aksincha[10].

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortonormallangan $\mathrm{E}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ bazisda $\vec{a}=\{a_x,a_y,\ a_z\}$ va $\vec{b}=\{b_x,b_y,\ b_z\}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo`lsin.

U holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i},a_y\cdot\vec{j},\ a_z\cdot\vec{k},\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i},b_y\cdot\vec{j},\ b_z\cdot\vec{k},$ yoyilmalarga ega bo`ladi.

Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko`paytmasi bu vektorlar mos koordinatalari ko`paytmalarining yig`indisiga teng, ya`ni

[9] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014. – B. 95.
[10] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014. – B. 96.

$\vec{a}*\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \vec{a}*\vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z, \qquad \vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ (12)[11]

Ma`lumki,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}_x^2 + \vec{a}_y^2 + \vec{a}_z^2} \quad (5)$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan a vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadratlarining yig`indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng.

4-misol. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi hamda uzunliklari topilsin.

$$\vec{a}*\vec{b} = 2*3 - 3*1 + 1*(-2) = 6 - 3 - 2 = 1.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

Agar vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo`lsa, skalyar ko`paytmadan foydalanib, vektorlar orasidagi burchakni, vektorlarning o`qidagi proyeksiyalarni hisoblash mumkin.

5-misol. Berilgan $\vec{a} = \{1;3;-2\}$ va $\vec{b} = \{3;1;3\}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $$\cos\varphi = \frac{1*3 + 3*1 - 2*3}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} * \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{19}} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = 90^0.$$

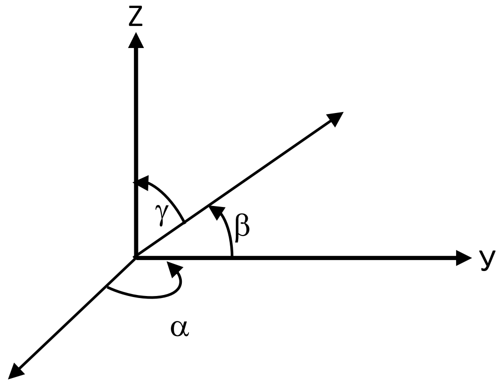
Odatda vektorning koordinata o`qlari bilan tashkil qilgan $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ burchaklarning kosinuslari uning yo`naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

$\vec{a} = \{x, y, z\}$ vektorning yo`naltiruvchi kosinuslari uning koordinatalari orqali quyidagicha aniqlanadi.

$$Cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$Cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$Cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$



Birlik vektorning koordinatalari uning yo`naltiruvchi kosinuslaridan iborat, ya`ni agar $|\vec{a}^0| = 1$ bo`lsa, $\vec{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ bo`ladi[12].

**Vektorial ko`paytma va uning xossalari.** Ikkita a va b vektorlarning skalyar ko`paytmasi natijasida son hosil bo`lishini ko`rib o`tdik. Endi bu vektorlarning shunday ko`paytmasini aniqlaymizki, natijada yana vektor hosil bo`lsin.

Ta`rif.** Fazodagi a va b vektorlarning **vektorial ko`paytmasi deb, quyidagi uchta shart bilan aniqlanuvchi yangi c vektorga (3.1-shaklga qarang) aytiladi:

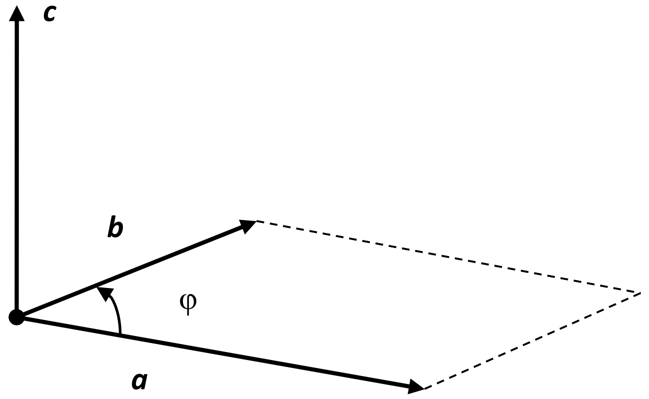
1. c vektorning moduli a va b vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo`lib, |c|=|a||b|sinφ formula bilan aniqlanadi. Bunda φ berilgan a va b vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.

2. c vektor a va b vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, ya`ni c$\perp$a va c$\perp$b bo`ladi.

[11] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011, P.92

[12] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011, P.93

3. c vektor shunday yo`nalganki, uning uchidan qaraganda a vektordan b vektorga eng qisqa burilish soat mili harakatiga teskari bo`ladi.



3.1-shakl

a va b vektorlarning vektorial ko`paytmasi $a \times b$ yoki [a,b] kabi belgilanadi.

Vektorial ko`paytma ta`rifi fizikadan kuch tushunchasi bilan bog`liq masaladan kelib chiqqan. Agar radius vektori r bo`lgan moddiy A nuqtaga f kuch ta`sir etayotgan bo`lsa, unda f×r vektorial ko`paytma f kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial ko`paytma xossalari.

1. Vektorial ko`paytmada ko`paytuvchilar o`rni almashsa, natijada faqat ishora o`zgaradi, ya`ni

$$a \times b = b \times a.$$

Bu tasdiq vektorial ko`paytma ta`rifining 3-shartidan bevosita kelib chiqadi. Demak, vektorial ko`paytma uchun kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

2. Vektorial ko`paytmada o`zgarmas λ ko`paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya`ni

$$[\lambda a, b]=[a, \lambda b]= \lambda[a, b].$$

Jumladan, λ=0 holda har qanday a vektor uchun [a,0]=[0, a]=0 ekanligini ko`ramiz.

3. Vektorial ko`paytma uchun taqsimot qonuni o`rinli, ya`ni

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

4. Agar a va b kollinear vektorlar bo`lsa, ularning vektorial ko`paytmasi a×b=0 bo`ladi. Aksincha noldan farqli a va b vektorlar uchun a×b=0 bo`lsa, bu vektorlar kollinear bo`ladi.

Isbot: 1) a va b kollinear vektorlar bo`lsin. Bu holda ular orasidagi burchak $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ va shu sababli $\sin\varphi=0$ bo`ladi. Unda vektorial ko`paytma ta`rifining 1-shartiga asosan

$|a\times b| = |a|\cdot|b|\cdot\sin\varphi = |a|\cdot|b|\cdot 0 = 0 \Rightarrow a\times b=0.$

2) a×b=0 va $|a|\neq 0$, $|b|\neq 0$ bo`lsin. Unda

$|a|\cdot|b|\cdot\sin\varphi = |a\times b| = 0 \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$.

Bundan a va b kollinear vektorlar ekanligi kelib chiqadi.

Natija: Ixtiyoriy a vektor uchun a×a=0 bo`ladi.

Misol: $(\mathrm{a} - 2\mathrm{b}) \times (2\mathrm{a} + \mathrm{b})$ ko`paytmani soddalashtiring.

Yechish: Vektorial ko`paytmaning ko`rib o`tilgan xossalariga asosan $(a - 2b) \times (2a + b) = 2 \cdot a \times a + a \times b - 4 \cdot b \times a - 2 \cdot b \times b = 2 \cdot 0 + a \times b + 4 \cdot a \times b - 2 \cdot 0 = 5 \cdot a \times b$.

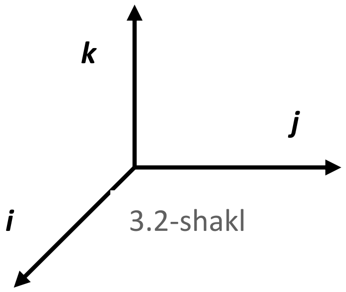
Vektorial ko`paytmaning koordinatalardagi ifodasi

Endi fazoda koordinatalari bilan berilgan a=(x_1,y_1,z_1) va b=(x_2,y_2,z_2) vektorlarning vektorial ko`paytmasini topish masalasi bilan shug`ullanamiz. Dastlab i, j va k ortlarning vektorial ko`paytmalarini hisoblaymiz. Vektorial ko`paytmaning 4-xossasidan kelib chiqqan natijaga asosan

$$i \times i = 0, j \times j = 0, k \times k = 0.$$

Vektorial ko`paytma va ortlar ta`riflaridan (3.2-shakl) quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j.$$



3.2-shakl

Yuqoridagi natijalarni 3.2-shakldan topish uchun vektorial ko`paytmadagi ikkinchi ko`paytuvchidan soat miliga teskari yo`nalishda burilib, vektorial ko`paytmani topamiz. Masalan, i × j ko`paytmani topish uchun j ortdan soat miliga teskari yo`nalishda burilib, k ort vektorga kelamiz.

Vektorial ko`paytmaning 1- xossasiga binoan

$$j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j$$

tengliklarni olamiz. Bu natijalarni yuqoridagi rasmda soat mili bo`yicha burilib topishimiz mumkin.

Yuqoridagi ortlar uchun tengliklar va vektorial ko`paytma xossalaridan foydalanib ushbu natijaga kelamiz:

$$a \times b = (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \times (x_2 i + y_2 j + z_2 k) = x_1 x_2 i \times i + x_1 y_2 i \times j + x_1 z_2 i \times k +$$
$$+ y_1 x_2 j \times i + y_1 y_2 j \times j + y_1 z_2 j \times k + z_1 x_2 k \times i + z_1 y_2 k \times cj + z_1 z_2 i =$$
$$= x_1 y_2 k - x_1 z_2 j - y_1 x_2 k + y_1 z_2 i + z_1 x_2 j - z_1 y_2 i =$$
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, k =$$
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Demak, $a=(x_1,y_1,z_1)$ va $b=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko`paytmasi $a\times b=(x, y, z)$ koordinatalari

$$x = y_1 z_2 - z_1 y_2, y = z_1 x_2 - x_1 z_2, z = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

formulalar bilan topiladi. Ammo bu formulalarni esda saqlab qolish oson emas. Shu sababli bu natijalarni qulayroq ko`rinishda yozish maqsadida koordinatalar uchun topilgan natijalarni ikkinchi tartibli determinantlar orqali ifodalaymiz:

$$x = y_1 z_2 - z_1 y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad y = z_1 x_2 - x_1 z_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad (6)$$
$$z = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix};$$

Laplas teoremasidan foydalanib, ushbu uchinchi tartibli determinantga kelamiz:

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = \mathrm{x}\mathrm{i} + \mathrm{y}\mathrm{j} + \mathrm{z}\mathrm{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Demak, $a=(x_1,y_1,z_1)$ va $b=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko`paytmasini determinant orqali

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (7)$$

formula bilan topish mumkin.

Misol. a=(2; 3; –1) va b=(3; –1; –4) vektorlarning vektorial ko`paytmasini toping.

Yechish: (7) formulaga asosan

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -13i + 5j - 11k = (-13,5,-11). \quad (8)$$

Vektorial ko`paytmaning tatbiqlari

Endi vektorial ko`paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni yechamiz.

Masala. $a = (x_1, y_1, z_1)$ va $b = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlardan hosil qilingan parallelogramm yuzini toping.

Yechish: Vektorial ko`paytma ta`rifining 1-sharti va (6) formulaga asosan parallelogramm yuzi S quyidagicha topiladi:

$$S = |a \times b| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \quad (9)$$

Misol: a=(2; 3; –1) va b=(3; –1; –4) vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Bunda (8) tenglikdan $a \times b = -13i + 5j - 11k = (-13,5,-11)$ ekanligi ma`lum. Shu sababli (9) formulaga asosan

$$S = \sqrt{(-13)^2 + 5^2 + (-11)^2} = \sqrt{169 + 25 + 121} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35}$$

Natija. a va b vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|a \times b| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \quad (10)$$

formula bilan topiladi.

Masala. $a = (x_1, y_1, z_1)$ va $b = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Yechish: Oldin ko`rilgan vektorial ko`paytmaning 4-xossasiga asosan $a = (x_1, y_1, z_1)$ va $b = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlar kollinear bo`lishi uchun ularning vektorial ko`paytmasi $a \times b = 0$ bo`lishi kerak. Unda (7) formuladan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x = y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0; \quad y = z_1 x_2 - x_1 z_2 = 0; \quad z = x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}; \ \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}; \ \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Demak, $a = (x_1, y_1, z_1)$ va $b = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlar kollinear bo`lishi uchun

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (11)$$

shart bajarilishi, ya`ni ularning mos koordinatalari proporsional bo`lishi kerak.

Misol. a=(m,3,2) va b=(4,6,n) vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo`lishini aniqlang.

Yechish: (6) kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{6} = \frac{2}{n} \Rightarrow m = 2, n = 4.$$

Vektorlarning aralash ko`paytmasi va uning xossalari

Uchta a, b, c vektorlarni o`zaro ko`paytirish masalasini ko`raylik. Agar a вa b vektorlarni skalyar ko`paytirib, natijada hosil bo`lgan sonni c vektorga ko`paytirsak, u holda c vektorga kollinear vektor hosil bo`ladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial ko`paytirib, natijada hosil bo`lgan vektorni uchinchi c vektorga yana vektorial ko`paytirsak, unda yangi bir d vektor hosil qilamiz. Bundan tashqari uchta vektorni quyidagi usulda ham ko`paytirish mumkin.

Ta`rif:** a, b, c vektorlarning **aralash ko`paytmasi deb dastlabki ikkita vektorlarning a×b vektorial ko`paytmani uchinchi c vektorga skalyar ko`paytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

a, b, c vektorlarning aralash ko`paytmasi abc kabi belgilanadi va , ta`rifga asosan, ushbu ko`rinishda bo`ladi:

$$abc = (a \times b) \cdot c \quad (12)$$

Bu yerda ham vektorial, ham skalyar ko`paytma qatnashgani uchun (12) aralash ko`paytma deb atalgan.

Aralash ko`paytmaning geometrik ma`nosini ko`rib o`taylik. Buning uchun komplanar bo`lmagan a, b, c vektorlarni qaraylik. Ma`lumki, a×b uzunligi a va b vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikulyar yo`nalgan vektordan iborat bo`ladi. Agar a×b vektorga c vektorni proyeksiyalasak, u holda shu proyeksiya parallelogramm tekisligiga perpendikulyar bo`lib, uning moduli a, b, c vektorlarga qurilgan parallelepiped balandligi H qiymatini ifodalaydi. Unda bu parallelopiped hajmi uchun $V = S_{asos} \cdot H = |(a \times b) \cdot c| = |abc|$ (13) formulaga ega bo`lamiz. Shunday qilib, abc aralash ko`paytmaning absolut qiymati a, b, c vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini ifodalar ekan.

Endi aralash ko`paytmaning xossalarini ko`rib o`tamiz:

- Aralash ko`paytmada vektorial va skalyar ko`paytma amallari o`rnini almashtirish mumkin, ya`ni

$$(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c).$$

Shu sababli aralash ko`paytmada amallarni ko`rsatmasdan, qisqacha abc kabi yozish mumkin.

- Aralash ko`paytmada ko`paytuvchilar o`rnini soat miliga teskari yo`nalish bo`yicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati o`zgarmasdan qoladi, ya`ni

$$abc = cab = bca = abc.$$

Bunga aralash ko`paytmaning aylanma xossasi deb aytiladi.

- Aralash ko`paytmada yonma – yon turgan vektorlarning o`rni almashtirilsa, uning ishorasi qarama-qarshisiga o`zgaradi, ya`ni

$$abc = -bas = bca = -cba.$$

Skalyar (vektorial) ko`paytmani qaysi hollarda nolga (nol vektorga) teng bo`lishini tahlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash ko`paytma uchun ko`rib chiqaylik. Aralash ko`paytma quyidagi hollarda nolga teng bo`ladi:

1) ko`paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;
2) ko`paytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;
3) ko`paytuvchi vektorlar komplanar bo`lsa.

Birinchi holda aralash ko`paytmaning nol bo`lishi o`z–o`zidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya`ni ikkita vektor kollinear bo`lsa, unda ularning vektorial ko`paytmasi nol va shu sababli aralash ko`paytma ham nolga teng bo`ladi. Uchinchi holda a×b va c vektorlar perpendikulyar bo`ladi va shu tufayli ularning skalyar ko`paytmasi, ya`ni aralash ko`paytma nolga teng bo`ladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

Teorema. Noldan farqli uchta vektorning komplanar bo`lishi uchun ularning aralash ko`paytmasi nolga teng bo`lishi zarur va yetarlidir.

Aralash ko`paytmaning koordinatalardagi ifodasi

Endi koordinatalari bilan berilgan uchta $a = (x_1, y_1, z_1), b = (x_2, y_2, z_2)\ va\ c = (x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning aralash ko`paytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

Vektorial ko`paytmani hisoblash formulasidagi determinantni Laplas teoremasiga asosan birinchi satr bo`yicha yoyilmasini qaraymiz:

$$a\times b = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k} = \mathrm{Xi} + \mathrm{Yj} + \mathrm{Zk}.$$

Skalyar ko`paytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda determinantning satr bo`yicha yoyilmasiga asosan

$$abc = (a \times b)\cdot c = Xx_3 + By_3 + Cz_3 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Demak, abc aralash ko`paytma birinchi, ikkinchi va uchinchi satrlari mos ravishda a, b va c vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli determinant kabi hisoblanadi.

Masalan, $a = (3,1,-2), b = (4,0,1), c = (0,2,-1)$ vektorlarning aralash ko`paytmasini (14) formula bo`yicha topamiz:

$$abc = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -18.$$

Aralash ko`paytmaning tatbiqlari

Aralash ko`paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni qaraymiz.

Masala. Koordinatalari bilan berilgan uchta $a = (x_1, y_1, z_1), b = (x_2, y_2, z_2)\ va\ c = (x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning komplanarlik shartini toping.

Yechish: Yuqorida ko`rib o`tilgan teorema va (14) formulaga asosan bu vektorlarning komplanar bo`lishi uchun

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

shart bajarilishi zarur va yetarli.

Misol. $a = (m, -12, -2), b = (0, m, 1)\ va\ c = (1,2,3)$ vektorlar m parametrning qanday qiymatlarida komplanar bo`lishini toping .

Yechish: Komplanarlikning kordinatalardagi (15) shartiga asosan

$$abc = \begin{vmatrix} m & -12 & -2 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m^2 - 12 + 2m - 2m = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2.$$

Masala. Koordinatalari bilan berilgan uchta $a = (x_1, y_1, z_1), b = (x_2, y_2, z_2)\ va\ c = (x_3, y_3, z_3)$ vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: Aralash ko`paytmaning geometrik ma`nosini ifodalovchi (12) tenglik va (13) formulaga asosan

$$V = |abc| = \pm abc = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Misol. $a=(3,-1,2), b=(0,3,1)$ va $c=(1,2,3)$ vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: (16) formulaga binoan

$$V=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=14.$$

Masala. Koordinatalari bilan berilgan uchta $a=(x_1,y_1,z_1), b=(x_2,y_2,z_2)$ va $c=(x_3,y_3,z_3)$ vektorlardan tuzilgan piramidaning V hajmini toping.

Yechish: Berilgan a, b va c vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi a va b vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S, balandligini h va hajmini V deb olsak, V=Sh ⁄ 3 tenglik o`rinli bo`ladi. Shu vektorlardan tuzilgan parallelepiped asosining yuzasi 2S, balandligi esa h bo`ladi. Bu parallelepiped hajmini $V_0$ deb olsak, $V_0=2Sh=|a\ b\ c|$ bo`ladi.

Bu holda piramida hajmi

$$V=V_0/6=|a\ b\ c|/6=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

formula bilan hisoblanadi.

Masala. Fazodagi to`rtta $M_1\ (x_1,y_1,z_1), M_2\ (x_2,y_2,z_2), M_3\ (x_3,y_3,z_3)$ va $M_4(x_4,y_4,z_4)$ nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

Yechish: $M_1, M_2, M_3\ va\ M_4$ nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4}=(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1)$$

vektorlarni komplanar bo`lishi zarur va yetarli. Shu sababli, (4) formulaga asosan, bu to`rtta nuqtani bir tekislikda yotishi uchun

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad (18)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masala. $M_1(1,m,-1),\ M_2=(0,1,2m+1),\ M_3=(-1,m,1)$ va $M_4=(2,1,3)$ nuqtalar m parametrning qanday qiymatlarida bir tekislikda joylashgan bo`lishini toping.

Yechish: (18) shartdan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-m & 2(m+1) \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1-m & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4(1-m)(2-m)=0 \Rightarrow m_1=1, m_2=2.$$

Demak, m=1 yoki m=2 bo`lganda yuqoridagi to`rtta nuqta bir tekislikda yotadi va ular

$$M_1(1,1,-1), \qquad M_2=(0,1,3),\ M_3=(-1,1,1)\ va\ M_4=(2,1,3)$$

yoki

$$M_1(1,2,-1), \qquad M_2=(0,1,5),\ M_3=(-1,2,1)\ va\ M_4=(2,1,3)$$

ko`rinishda bo`ladi.

Nazorat savollari

1. Qanday vektorlar kollinear, komplanar, teng deb ataladi?
2. Vektorning moduli nima?

3. Vektorlar ustidagi qaysi amallar chiziqli amallar deb ataladi.
4. Qanday vektorga chiziqli bog`liq va qanday vektorlar chiziqli erkli deb ataladi?
5. Fazoning bazisi va o`lchami nima?
6. Vektorning o`qdagi tashkil etuvchisi nima?
7. Vektorning o`qqa proyeksiyasi nima?
8. Vektorlar ustida chiziqli amallarga ularning koordinatalari ustida shunday amallar mos kelishini isbotlab bering.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.
2. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014.
3. Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995.

Qo`shimcha adabiyotlar

1. V.V.Konev. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. Tomsk. TPU Press, 2009.
2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. Toshkent, 1993.

Internet saytlari

1. http://library.ziyonet.uz/uz
2. http://library.uz-djti.uz/

FUNKSIYA HAQIDA TUSHUNCHA. CHIZIQLI FUNKSIYALAR VA ULARNING GRAFIKLARI. CHIZIQLI TENGLAMALAR

REJA

- Funksiya tushunchasi va uning ta`rifi
- Chiziqli funksiyalar va ularning grafiklari
- Darajali, tregonametrik, ko`rsatgichli va logorifmik funksiyalar
- Funksiyani limiti. Limitlarni hisoblash

Tayanch iboralar: Funksiya. Chiziqli funksiyalar va ularning grafiklari. Chiziqli tenglamalar. To`g`ri chiziqning burchak koeffitsienti. Darajali, trigonometrik, ko`rsatgichli va logarifmik funksiyalar. Funksiyani limiti.

> Matematik analiz haqli ravishda matematik fanlar ichida birinchisi bo`lib hisoblanadi.
>
> ***Appel P.E.***

Funksiya tushunchasi va uning ta`rifi

Tabiatda ikki xil miqdorlar uchraydi, o`zgaruvchi va o`zgarmas miqdorlar. Bizga bir necha to`rtburchak berilgan bo`lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba`zilari o`zgarmaydi, ba`zilari o`zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to`rtburchaklarda burchaklarining to`g`riligi, ularning soni to`rtta bo`lishligi va yig`indisi $360°$ ga tengligi o`zgarmaydi. Tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o`zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizsak, ularda aylana uzunliklarining o`z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo`lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o`zgarib turadi.

Ma`lum sharoitda faqat bir xil son qiymatlariga ega bo`lgan miqdorlar o`zgarmas miqdorlar deyiladi. Ma`lum sharoitda har xil son qiymatlariga ega bo`lgan miqdorlar o`zgaruvchi miqdorlar deyiladi. Odatda o`zgarmas miqdorlarni a, b, c, d, ...., o`zgaruvchi miqdorlarni x, y, z, u, v, ... harflari bilan belgilaydilar[1].

Matematikada ko`pincha o`zaro bir-biriga bog`liq ravishda o`zgaradigan miqdorlar bilan ish ko`riladi. Yuqoridagi misollarimizda doiraning yuzi uning radiusining o`zgarishiga qarab o`zgaradi, ya`ni doiraning radiusi ortsa, yuzi ham ortadi, kamaysa kamayadi. Xuddi shuningdek, kvadratning tomoni bilan yuzi orasida ham shunday bog`lanish bor. Kvadratning yuzi uning tomoniga bog`liq ravishda o`zgaradi.

Ta`rif:** Agar x miqdorning X sohadagi har bir qiymatiga biror f qonuniyatga ko`ra y miqdorning Y-sohadan aniq bir qiymati mos keltirilsa, y miqdor x miqdorning X-sohadagi **funksiyasi deyiladi va $y=f(x)$ kabi yoziladi[2].

Bu holda x - argument yoki erkli o`zgaruvchi, y - esa funksiya yoki erksiz o`zgaruvchi deyiladi. Agar y x ning funksiyasi bo`lsa, u holda x va y lar orasidagi bog`lanish funksiyali bog`lanish deyiladi va quyidagicha yoziladi: $y=f(x)$, $y=q(x)$, $y=\varphi(x)$ va hokazo. Agar yuqoridagi misollarga e`tibor bersak, doiraning yuzi radiusning funksiyasi, kvadratning yuzi tomonining funksiyasi ekan.

---

[1] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 27.
[2] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 28.

Argument qabul qilishi mumkin bo`lgan qiymatlari to`plami funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning o`zi qabul qilishi mumkin bo`lgan qiymatlari to`plami funksiyaning o`zgarish sohasi yoki qiymatlari to`plami deyiladi[3].

Bizga bir necha to`rtburchak berilgan bo`lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba`zilari o`zgarmaydi, ba`zilari o`zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to`rtburchaklarda burchaklarining tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o`zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizsak, ularda aylana uzunliklarining o`z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo`lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o`zgarib turadi.

Funksiyaning berilish usullari

Funksiya sharoitiga qarab jadval, analitik va grafik usullar bilan berilishi mumkin.

Funksiya jadval usulida berilganda, argumentning ma`lum tartibdagi x_1, x_2, x_3,… x_n,… qiymatlari va funksiyaning ularga mos keluvchi y_1, y_2, y_3, … ,y_n, … qiymatlari jadval holida beriladi:

Funksiyalarning jadval usulida berilishiga misol qilib kvadratlar, kublar, kvadrat ildizlar jadvallarni ko`rsatish mumkin. Bu usuldan ko`pincha miqdorlar orasida tajribalar o`tkazishda foydalaniladi.

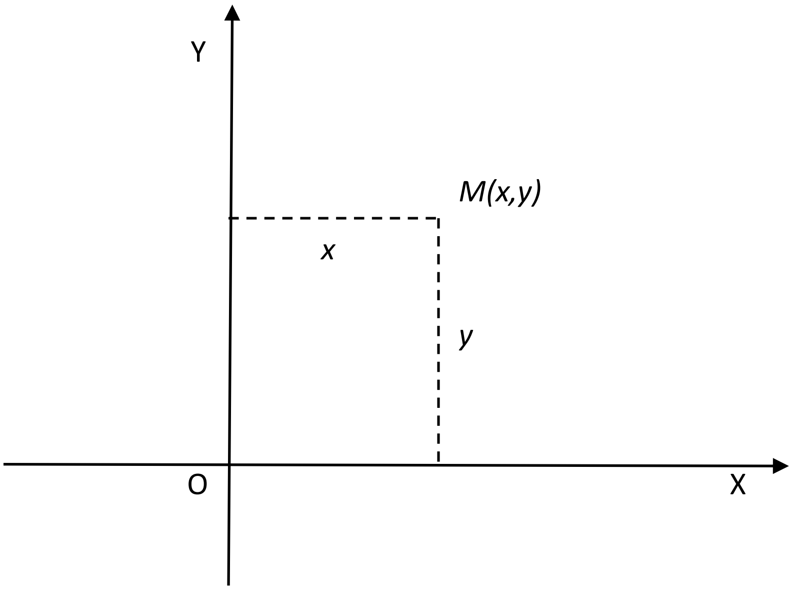
X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n	…

To`g`ri burchakli koordinatalar sistemasi. Ma`lumki, sonlar o`qida nuqtaning vaziyati bir son uning koordinatasi bilan aniqlanar edi. Endi to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritamiz.

Tekislikda sanoq boshlari ustma-ust tushadigan va o`zaro perpendikulyar bo`lgan OX va OY sonlar o`qini chizamiz. Gorizontal holda tasvirlangan sonlar o`qi ordinatalar o`qi, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Hammasi birgalikda to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi.

To`g`ri burchakli koordinatalar sistemasida nuqtaning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilamiz, to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasi olingan tekislikda ixtiyoriy M nuqta berilgan bo`lsin. Shu nuqtadan koordinata o`qlariga perpendikulyarlarning absissalar o`qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son uning absissasi, koordinatalar o`qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son esa uning ordinatasi deyiladi va M(x,y) tartibida yoziladi (4.1-shakl).

[3] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 29.



4.1-shakl

Demak, to`g`ri burchakli koordinatalar tekisligida har qanday bir juft ma`lum tartibda berilgan son bilan aniqlanar ekan. Xuddi shuningdek, har qanday bir juft songa koordinatalar tekisligida bitta nuqta mos keladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi

y=f(x) funksiyaning grafigi deb koordinatalari y=f(x) ni to`g`ri tenglikka aylantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalar to`plamiga aytiladi. Agar funksiyaning grafigi tasvirlangan bo`lsa, funksiya grafik usulda berildi deyiladi[4].

Endi savol tug`iladi, har qanday egri chiziq biror funksiyani ifodalaydimi? Buni aniqlash uchun egri Ou o`qiga parallel to`g`ri chiziqlar chizamiz, agar bu to`g`ri chiziq egri chiziq bilan kamida ikki nuqtada kesishsa, grafik funksiyani ifodalamaydi, agar bitta nuqtada kesishsa funksiyani ifodalaydi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi

Formula yordamida berilgan funksiyalarga analitik usulda berilgan deyiladi. Masalan, $y = x^2, y = kx + b, y = a^x, y = lgx, y = sin\,x, y = tg\,x, y = 2x^3 - x + 4$ funksiyalar analitik usulda berilgan. Agar analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi to`g`risida alohida shart qo`yilmagan bo`lsa, u holda y=f(x) da o`ng tomonda turuvchi ifoda ma`noga ega bo`ladigan x ning qiymatlari olinadi. Masalan, agar $y=x^2$ ni kvadratning tomoni bilan yuzi ifodalovchi bog`lanish sifatida olsak, u holda aniqlanish sohasi barcha musbat sonlardan iborat bo`ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topishga doir misollar ko`raylik. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = \frac{3}{x}$. Yechimi. Ma`lumki, kasr ma`noga ega bo`lishi uchun uning maxraji noldan farqli bo`lishi kerak. Demak, $x \neq 0$ yoki $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

[4] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 31.

2. $y=\frac{1}{2}(x-1)^{-1}$. Yechimi. Xuddi yuqoridagidek muhokama yuritsak, 2x-1≠0 yoki 2x≠1, $x\neq\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ dan iborat.

3. $y=\sqrt{3x+2}$. Yechimi. Kvadrat ildiz ma`noga ega bo`lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiy bo`lmasligi kerak, ya`ni $3x+2\geq 0$, bunda $x\geq-\frac{2}{3}$. Demak, aniqlanish sohasi $[-\frac{2}{3},+\infty)$ dan iborat.

4. $y=\frac{1}{\sqrt{4x-5}}$. Yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, u holda 4x-5>0 bo`ladi. Bundan $x>\frac{5}{4}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{5}{4},+\infty)$ dan iborat.

5. $y=\lg(2x-1)$. Yechimi. Logarifmik funksiya faqat musbat sonlar uchun aniqlangan. Demak, (2x-1)>0 bo`lishi kerak. Bundan $x>\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2},+\infty)$ dan iborat.

6. $y=\frac{1}{\lg(2x-1)}$. Yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1>0$, $2x-1\neq 1$ bo`ladi. Bundan $x>\frac{1}{2}$, x≠1 kelib chiqadi. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2};+1)\cup(1;+\infty)$ dan iborat.

A) analitik usul funksiyaning o`rganish jarayonida juda ko`p uchraydigan usuldir, lekin ba`zi xollarda funksiyaning qiymatini topish murakkab hisoblashlarga olib keladi:

B) y=f(x) yozuv hali funksiyaning analitik usulda berilishi bo`lmasligi mumkin. Masalan, ushbu Dirixle funksiyasini olaylik:

$$y=\begin{cases}1, agar\ x-ratsional\ son\ bo`lsa\\0, agar\ x-irratsional\ son\ bo`lsa\end{cases}$$

Demak y=f(x) funksiya berilgan, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to`plamidan iborat, ammo funksiyaning analitik ifodasi berilgan emas[5]:

V) funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo`ladi, lekin funksiyaning sohasi cheksiz to`plam bo`lganda, uning barcha qiymatlarini ko`rsatib bo`lmaydi:

G) funksiyaning grafik usulda berilishi uning o`zgartirishlarini ko`rgazmali qilish imkonini beradi.

Funksiyaning grafigi – egri chiziq (hususiy holda to`gri chiziq), ba`zi hollarda biror nuqtalar to`plami bo`ladi.

Funksiya grafigini chizish

y=f(x) funksiyaning grafigini hosil qilish uchun M(x,f(x)) nuqtalarni hosil qilib, ular bir-biriga juda yaqin bo`lganda, silliq chiziq bilan tutashtiriladi.

Misol. 1) $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi chizilsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi x≠0 haqiqiy sonlar to`plami, ya`ni $\left]-\infty,0\right[U\left]\ 0,+\infty\right[$ dan iborat.

Endi, aniqlanish sohasidan x ning bir necha qiymatlarini olib, y ning ularga mos keladigan qiymatlarini topamiz.

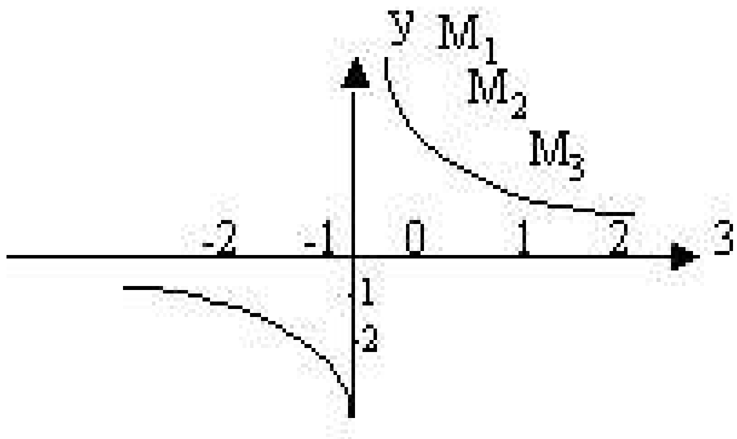
---

[5] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.P.30

X	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	...
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	...

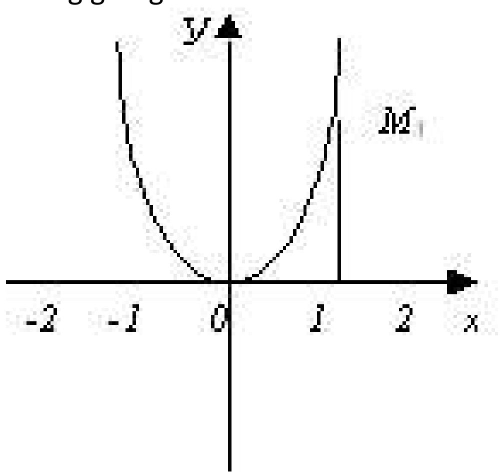
Koordinata tekisligida $M_1(1;1),\ M_2(2;\frac{1}{2}),\ M_3(3;\frac{1}{3}),....$

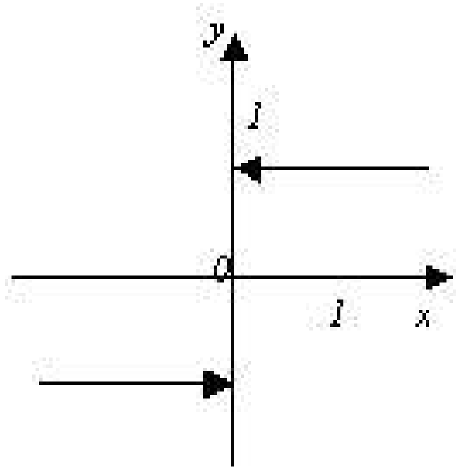
nuqtalarni hosil qilamiz. Bir biriga yaqin turga nuqtalarni uzluksiz chiziq yorlamida tutashtirsak, funksiyaning grafigini ifoda qiladigan egri chiziq giperbola hosil bo`ladi (4.2-shakl).



4.2-shakl

2) y=x^2 ning grafigi chizilsin.





4.3-shakl 4.4-shakl

Jadval tuzamiz:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	...
y=x^2	0	1	4	9	1	4	9	...

$M_1(0;0),\quad M_2(1;1),\quad M_3(2;4),....$ nuqtalarni hosil qilamiz. Ularni silliq chiziq bilan tutashtirsak, parabola egri chizig`i hosil bo`ladi (4.3-shakl)

3) 4.4-shaklda

$$y = \begin{cases} 1, agar\ x > 0\ bo`lsa, \\ 0, agar\ x = 0\ bo`lsa, \\ -1, agar\ x < 0\ bo`lsa \end{cases}$$

funksiyaning grafigi ko`rsatilgan.

Aksincha, agar tekislikda biror egri chiziq berilgan bo`lib, abssissalar o`qiga tik bo`lgan har qanday to`gri chiziq bu egri chiziq bilan bittadan ko`p bo`lmagan nuqtada kesishsa, u holda bu egri chiziq funksiyani ifoda qiladi.

Funksiya va u bilan bog`liq tushunchalar

Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o`zgarmas va o`zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

Ta`rif: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar **o`zgarmas miqdorlar** deyiladi.

Masalan, yorug`lik tezligi c, erkin tushish tezlanishi g, aylana uzunligini uning diametriga nisbati $\pi$, izotermik jarayonlarda harorat $t^0$ o`zgarmas miqdorlardir.

Ta`rif: Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar **o`zgaruvchi miqdorlar** deyiladi.

Masalan, tekis harakatda v tezlik o`zgarmas miqdor bo`lib, vaqt t va bosib o`tilgan masofa s o`zgaruvchi miqdorlardir.

Biror jarayonni o`rganayotganimizda bir nechta o`zgaruvchi miqdorlar o`rtasidagi o`zaro bog`lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni v, vaqtni t va bosib o`tilgan masofani s desak, u holda t va s o`zgaruvchilar o`zaro s=v·t ko`rinishda bog`langan bo`ladi. Bunday bog`lanishlarni juda ko`p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o`rganish maqsadida funksiya tushunchasi kiritiladi.

Ta`rif: Agarda x o`zgaruvchining biror D sonli to`plamga tegishli har bir qiymatiga ma`lum bir qonun-qoida asosida y o`zgaruvchining biror E to`plamga tegishli yagona bir qiymati mos qo`yilgan bo`lsa, ya`ni f : D → E bo`lsa, unda y o`zgaruvchi x o`zgaruvchining **funksiyasi** deyiladi.

Biror y o`zgaruvchi x o`zgaruvchining funksiyasi ekanligi y=f(x) kabi belgilanadi (f harfi o`rniga F, h, g, $\varphi$ kabi boshqa harflar ham qo`llanilishi mumkin). Bu yerda x **erkli o`zgaruvchi yoki argument**, y esa **erksiz o`zgaruvchi yoki funksiya** deb ataladi.

Masalan, $y = 2x + 3, y = 3x^2 + 4x - 1, y = 2/x, y = 5xe^x + 6$ funksiyalarga misol bo`ladi.

Ta`rif: Berilgan f : D → E funksiyada D – funksiyaning **aniqlanish sohasi**, E − **o`zgarish yoki qiymatlar sohasi** deyiladi.

y=f(x) funksiyaning aniqlanish sohasi D{f}, qiymatlar sohasi esa E{f} kabi belgilanadi. Masalan, $f(x) = \sin\sqrt{x}$ funksiya uchun D{f}=[0,∞), E{f}=[–1,1].

Shuni ta`kidlab o`tish lozimki, oldingi paragrafda ko`rilgan $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikni aniqlanish sohasi D{f}=N−natural sonlar to`plami, qiymatlar sohasi esa $f(n)= a_n$, $n\in N$, haqiqiy sonlardan iborat funksiya deb qarash mumkin.

Matematik analiz fanida asosan funksiyalar va ular bilan bog`liq bo`lgan tasdiqlar o`rganiladi.

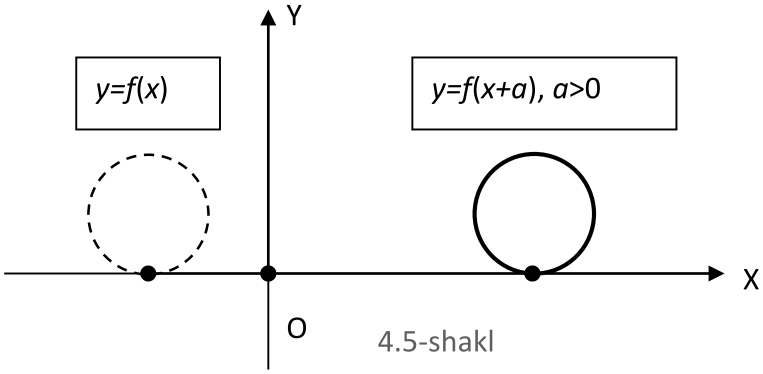
Funksiya grafigi

Funksiya haqida geometrik tasavvur hosil etish uchun uning grafigi tushunchasi kiritiladi.

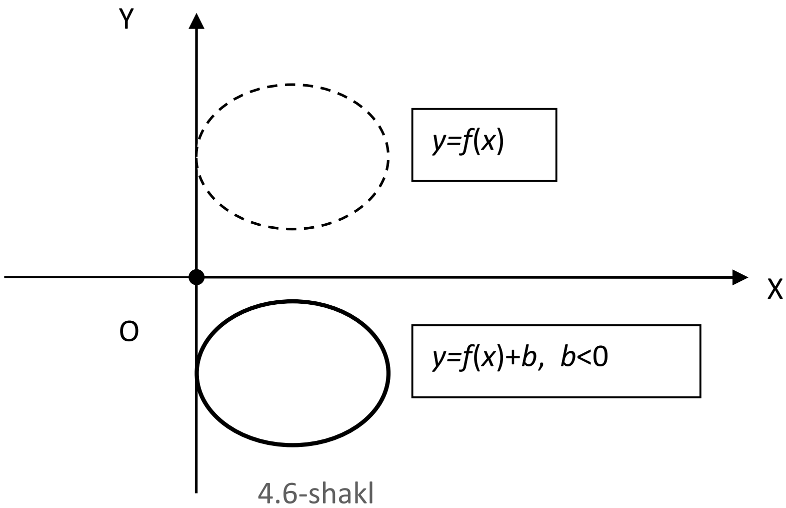
Ta`rif:** XOY koordinata tekislikdagi $(x, y) = (x, f(x)), x \in D\{f\}$, koordinatali nuqtalarning geometrik o`rni y=f(x) **funksiyaning grafigi deyiladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi paraboladan, y=cosx funksiya grafigi sinusoidadan, y=2x+5 funksiya grafigi esa to`g`ri chiziqdan iboratdir.

Turli masalalarni yechishda berilgan y=f(x) funksiyaning L grafigini ma`lum bir ko`rinishda o`zgartirishga to`g`ri keladi.



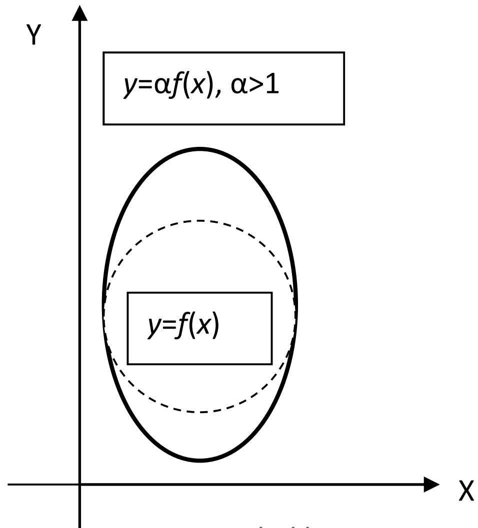
4.5-shakl



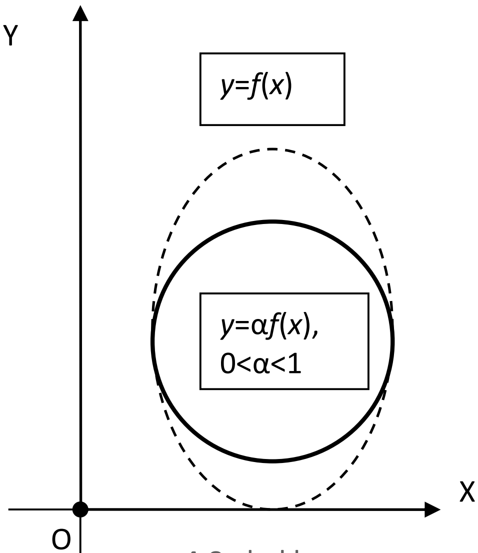
4.6-shakl

- y=f(x+a) funksiyaning grafigi L chiziqni OX o`qi bo`yicha |a| birlik chapga (agar a>0 bo`lsa) yoki o`ngga (agar a<0 bo`lsa) parallel ko`chirishdan hosil bo`ladi (4.5-shaklga qarang).
- y=f(x)+b funksiyaning grafigi L chiziqni OY o`qi bo`yicha |b| birlik yuqoriga (agar b>0 bo`lsa) yoki pastga (agar b<0 bo`lsa) parallel ko`chirishdan hosil bo`ladi (4.6-shaklga qarang).

- y=αf(x) funksiyaning grafigi L chiziqni OY o`qi bo`yicha α marta cho`zish (agar α>1 bo`lsa, 4.7-shakl) yoki qisish (agar 0<α<1 bo`lsa, 4.8-shakl) orqali hosil bo`ladi. Agar α<0 bo`lsa, unda L chiziq OX o`qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.

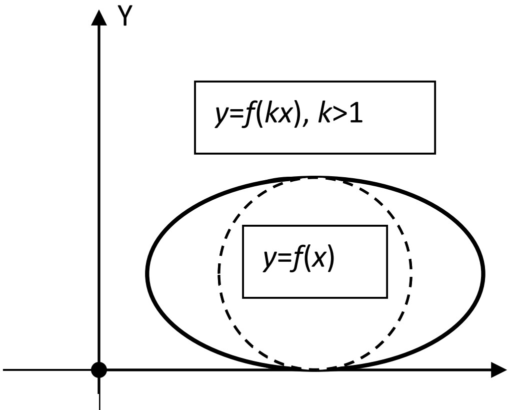


4.7-shakl

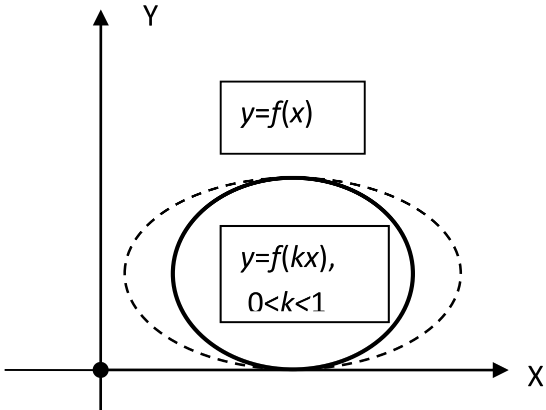


4.8-shakl

➢ y=f(kx) funksiyaning grafigi L chiziqni OX o`qi bo`yicha k marta cho`zish (agar k>1 bo`lsa, 4.9-shakl) yoki qisish (agar 0<k<1 bo`lsa, 4.10-shakl) orqali hosil bo`ladi. Agar k<0 bo`lsa, unda L chiziq OY o`qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.



4.9-shakl



4.10-shakl

Funksiyani berilish usullari

Turli masalalarni qarashda funksiya asosan to`rt usulda berilishi mumkin.

❖ **Analitik usul.** Ko`p hollarda funksiyalar analitik usulda, ya`ni x argument ustida bajariladigan matematik amallarni formulalar orqali ifodalash orqali beriladi. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y orasidagi bog`lanish funksiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik usulda aniqlanadi.

❖ **Jadval usuli.** Bu usulda funksiya

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_{n-1}	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_1	y_2	y_3	. . .	y_{n-1}	y_n

ko`rinishdagi jadval orqali beriladi. Masalan, Bradisning to`rt xonali matematik jadvallar kitobchasida funksiyalarning qiymatlari shunday ko`rinishda berilgan. Odatda x argument va y funksiya orasidagi bog`lanish tajriba yoki kuzatuvlar asosida o`rganilayotgan bo`lsa, funksiya qiymatlari jadval ko`rinishda ifodalanadi.

❖ **Grafik usul.** Bunda x argument va y funksiya orasidagi bog`lanish bu funksiyaning grafigi orqali beriladi. Masalan, yurak faoliyatini ifodalovchi funksiya kardiogramma orqali grafik ko`rinishda ifodalanadi. Shuningdek bu usuldan tenglamalarni grafik usulda yechishda ham foydalaniladi.

❖ **Ta`rif usuli.** Bu usulda funksiya qiymatini aniqlash qonuni uni ta`riflash orqali beriladi. Masalan, **Dirixle funksiyasi** deb ataluvchi va [0,1] kesmada aniqlangan D(x) funksiyani analitik, jadval yoki grafik ko`rinishlarda ifodalab bo`lmaydi. Bu funksiya qiymatlari ta`rif bo`yicha quyidagicha aniqlanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, agar\ x - ratsional\ son\ bo`lsa \\ 0, agar\ x - irratsional\ son\ bo`lsa \end{cases}$$

Funksiya ko`rinishlari

Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab turli ko`rinishlarga ajratiladi.

Ta`rif:** Berilgan y=f(x) funksiya biror D⊂D{f} sohaga tegishli ixtiyoriy $x_1$, $x_2$ ∈D va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) \leq f(x_2)]$ shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada **o`suvchi (kamaymoqchi) funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x^3$ funksiya (–∞;∞) oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining (0,∞) oralig`ida o`suvchi bo`ladi. **Ant`ye funksiya** deb ataladigan y=[x] funksiyaning qiymati argument x qiymatiga eng yaqin va undan katta bo`lmagan butun son kabi aniqlanadi. Masalan, [1.2]=1, [2.98]=2, [12]=12, [–1.5]=–2. Bu holda f(x)=[x] funksiya uchun D{f}=(–∞;∞) va E{f}=Z={0,±1, ±2,⋯} bo`lib, u aniqlanish sohasida kamaymoqchi funksiya bo`ladi.

Ta`rif:** Berilgan y=f(x) funksiya biror D⊂D{f} sohaga tegishli ixtiyoriy $x_1$, $x_2$∈D va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1) > f(x_2)$ $[f(x_1) \geq f(x_2)]$ shartni qanoatlantirsa , u shu D sohada **kamayuvchi (o`smoqchi) funksiya deyiladi.

Masalan, y=–2x funksiya (–∞;∞) oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining (–∞,0) oralig`ida kamayuvchi bo`ladi. y=1–[x] funksiya esa (–∞;∞) oraliqda o`smoqchi bo`ladi.

O`suvchi yoki kamaymoqchi, kamayuvchi yoki o`smoqchi funksiyalar birgalikda **monoton funksiyalar** deyiladi.

Ta`rif:** Aniqlanish sohasi D{f} nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo`lgan y=f(x) funksiya ixtiyoriy x∈D{f} uchun $f(-x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$ shartni qanoatlantirsa, u **juft [**toq**] **funksiya** deyiladi .

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo`ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo`lishi shart emas. Masalan, $f(x) = x^2 - 3x + 1\ yoki\ f(x) = 2x - 3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

Ta`rifdan juft funksiya grafigi OY koordinata o`qiga, toq funksiya grafigi esa O koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo`lishi kelib chiqadi.

Teorema: Agar $f(x)\ va\ g(x)$ juft funksiyalar bo`lsa, ularning umumiy D aniqlanish sohasida $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x) \neq 0\ bo'lsa, f(x)/g(x)$ funksiyalar ham juft funksiyalardir. Agar $f(x)\ va\ g(x)$ toq funksiyalar bo`lsa $f(x) \pm g(x)$, toq, $f(x) \cdot g(x)$ va $f(x)/g(x))$ funksiyalar esa juft funksiya bo`ladi. Agar f(x) juft va g(x) toq funksiya bo`lsa, ularning ko`paytmasi va bo`linmasi toq funksiya bo`ladi.

Isbot: Misol sifatida faqat bir hol uchun isbotni keltiramiz, chunki boshqa hollar ham xuddi shundek ko`riladi. Masalan, qaralayotgan f(x) va g(x) juft funksiyalar, ya`ni f(–x)=f(x) va g(–x)=g(x) bo`lsin. Bu holda F(x)=f(x)±g(x) funksiya uchun

$$F(-x) = f(-x) \pm g(-x) = f(x) \pm g(x) = F(x)$$

tenglik o`rinli va , ta`rifga asosan F(x) juft funksiya bo`ladi.

Izoh: Agar f(x) aniqlanish sohasi D{f} koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo`lgan ixtiyoriy funksiya bo`lsa, unda $F(x) = f(x) + f(-x)\ juft, G(x) = f(x) - f(-x)$ esa toq funksiya bo`lishini ko`rish qiyin emas.

Ta`rif:** Agar $y = f(x)$ funksiya uchun shunday T>0 son mavjud bo`lsinki, $\forall x \in D\{f\}$ uchun $x \pm T \in D\{f\}$ bo`lib, $f(x \pm T) = f(x)$ shart bajarilsa, u **davriy funksiya deb ataladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat T soni shu funksiyaning **davri** deyiladi.

Masalan, y=sinx davri $T = 2\pi, y = tg\ x$ esa davri T=π bo`lgan davriy funksiyalardir. $y = \{x\} = x - [x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo`ladi. Masalan, $\{1.2\} = 0.2, \{2.98\} = 0.98, \{\pm 8\} = 0, \{-1.7\} = 0.3$ (bunda –1.7= –2+0.3 deb qaraladi). Bu holda $D\{f\} = (-\infty; \infty)\ va\ E\{f\} = (0,1)$ bo`lib, ixtiyoriy $x \in D\{f\}\ va\ n \in N = \{1,2,3, \dots\}$ uchun $\{x + n\} = \{x\}$ bo`ladi. Bundan $f(x) = \{x\}$ davri T=1 bo`lgan davriy funksiya ekanligini ko`rish mumkin. $y = x^2\ yoki\ y = e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo`ladi.

Ta`rif: Berilgan y=f(x) funksiya uchun shunday M >0 soni topilsaki, ixtiyoriy x∈D uchun $|f(x)| \le M$ shart bajarilsa, u D sohada **chegaralangan funksiya** deyiladi. Aks holda y=f(x) **chegaralanmagan funksiya** deb ataladi.

Masalan, y=sinx chegaralangan funksiya, chunki barcha x uchun |sinx|≤1. $y=2^x$ funksiya (−∞,0) oraliqda chegaralangan va $2^x \le 1$, ammo bu funksiya (0,∞) oraliqda chegaralanmagan, chunki ixtiyoriy M>0 katta soni uchun $x>\log_2 M$ bo`lganda $2^x > M$ bo`ladi.

Ta`rif:** Agar y=f(x) funksiya biror D sohaning har bir x nuqtasida o`zgarmas C soniga teng bo`lsa, u D sohada **o`zgarmas funksiya deyiladi.

Masalan, $x \in (-\infty, \infty)$ sohada $f(x) = sin^2 x + cos^2 x = 1, x \in (-\infty, 0)$ sohada $f(x) = x/|x| = -1$ o`zgarmas funksiya bo`ladi.

Murakkab va teskari funksiyalar

Funksiyalar bilan bog`liq yana ikkita tushunchani kiritamiz.

Ta`rif: Agar z=φ(x) funksiya X→Z , y=f(z) esa Z→Y akslantirishni ifodalasa , unda y=f(φ(x)) funksiya X→Y akslantirishni ifodalaydi va **murakkab funksiya** deb ataladi. Bu yerda φ **ichki**, f esa **tashqi funksiya** deyiladi. y=f(φ(x)) murakkab funksiya f va φ funksiyalarning **superpozitsiyasi** deb ham aytiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ murakkab funksiya bo`lib, unda $\varphi(x)=x^2$ ichki, f(φ)=sinφ esa tashqi funksiya bo`ladi. $y=\sin^2 x$ murakkab funksiyada esa φ(x)=sinx ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funksiya bo`ladi.

Ta`rif:** Aniqlanish sohasi D{f} va qiymatlar sohasi E{f} bo`lgan y=f(x) funksiya uchun har bir y∈E{f} soniga f(x)=y shartni qanoatlantiradigan yagona x∈D{f} sonini mos qo`yadigan x=φ(y) funksiya mavjud bo`lsa, u berilgan f funksiyaga **teskari funksiya deb ataladi.

Berilgan f funksiyaga teskari funksiya f^{-1} kabi belgilanadi. Bunda f^{-1} faqat belgilash bo`lib, u 1/f degan ma`noni ifodalamasligini ta`kidlab o`tamiz.

Odatda argument x, funksiya esa y orqali belgilanganligi uchun, y=f(x) funksiyaga teskari x=φ(y) funksiya y=φ(x) yoki $y=f^{-1}(x)$ ko`rinishda yoziladi.

Agar y=f(x) funksiya o`suvchi yoki kamayuvchi bo`lsa, unga teskari funksiya $y=f^{-1}(x)$ mavjudligini va uni f(y)=x tenglama yechimi kabi topishimiz mumkinligini isbotlash mumkin. Masalan, f(x)=3x–1 bo`lsa, unda 3y–1=x tenglamadan teskari funksiya $f^{-1}(x)=(a+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta`kidlab o`tish kerakki, o`zaro teskari funksiyalar uchun $D\{f\} = E\{f^{-1}\}\ va\ E\{f\} = D\{f^{-1}\}, f[f^{-1}(x)] = x\ va\ f^{-1}\,[f(x)] = x$ munosabatlar o`rinli bo`ladi. Bundan tashqari ularning grafiklari y=x to`g`ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo`ladi

Asosiy elementar va elementar funksiyalar

Maktab matematikasidan bizga ma`lum bo`lgan quyidagi funksiyalarni eslatib o`tamiz:

❖ **Darajali funksiya.** Bu funksiya $y=x^{\alpha}$ ko`rinishda bo`lib, o`zgarmas daraja ko`rsatkichi $\alpha \in R$ bo`ladi. Masalan,

$$y = 1 = x^0, \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

darajali funksiyalardir. Darajali funksiyaning xossalari α daraja ko`rsatkichi qiymatiga bog`liq bo`ladi. Masalan, $\alpha$ musbat butun son bo`lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi D{f}=(−∞,∞), qiymatlar sohasi esa toq α uchun E{f}=(−∞,∞), juft α uchun E{f}=[0,∞) bo`ladi. Agar $\alpha$ manfiy butun son bo`lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi D{f}={x: x≠0}, qiymatlar sohasi esa E{f}=(−∞,∞) bo`ladi. Bundan tashqari $\alpha$ juft son bo`lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ juft, α toq bo`lsa toq funksiya bo`ladi.

❖ **Ko`rsatkichli funksiya.** Bu funksiya $y=a^x$ ko`rinishda va unda daraja asosi a>0 va a≠1 shartni qanoatlantiruvchi o`zgarmas son bo`ladi. Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$, $y=e^x$ ko`rsatkichli funksiyalardir. Bu funksiya uchun D{f}=(−∞,∞), E{f}=(0,∞) bo`ladi. Agar a>1 bo`lsa, $f(x)=a^x$ o`suvchi, 0<a<1 bo`lsa kamayuvchi funksiyaga ega bo`lamiz.

❖ **Logarifmik funksiya.** Bu funksiya $y=\log_a x$, (a>0, a≠1), ko`rinishda bo`lib, $y=a^x$ ko`rsatkichli funksiyaga teskari funksiyani ifodalaydi.

Masalan, $y=\log_2 x$, $y= \log_{0.8} x$, $y= \log_{10} x =\lg x$, $y= \log_e x =\ln x$ logarifmik funksiyalardir. Logarifmik $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun D{f}=(0,∞), E{f}=(−∞,∞) bo`ladi. Agar logarifm asosi a>1 bo`lsa, $f(x)=\log_a x$ o`suvchi, 0<a<1 holda esa kamayuvchi bo`ladi.

❖ **Trigonometrik funksiyalar.** Bular y=sinx, y=cosx, y=tgx va y=ctgx funksiyalardan iborat. Bu yerda f(x)=sinx va f(x)=cosx funksiyalar uchun D{f}=(−∞,∞) va E{f}=[0,1] bo`lib, ular T=2π davrli va chegaralangan bo`ladi. Bunda f(x)=sinx–toq, f(x)=cosx–juft funksiyalardir.

f(x)=tgx va f(x)=ctgx funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda $D\{f\} = \{x: x \neq (2k+1)\pi/2, k \in Z\}\ va\ D\{f\} = \{x: x \neq k\pi, k \in Z\}$, qiymatlar sohasi E{f}=(−∞,∞) bo`ladi. Bu funksiyalar T=π davrli, toq va chegaralanmagan bo`ladi.

❖ **Teskari trigonometrik funksiyalar.** Bularga $y = arc\sin x, y = arc\cos x, y = arc\ tg\ x, y = arc\ ctg\ x$ funksiyalar kiradi. Ular mos trigonometrik funksiyalarga teskari bo`ladi. f(x)=arcsinx va f(x)=arccosx uchun D{f}=[–1,1], qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\} = [-\pi/2, \pi/2]\ va\ E\{f\} = [0, \pi]$ bo`ladi. $f(x) = arc\ ctg\ x\ va\ f(x) = arc\ ctg\ x$ uchun D{f}=(−∞,∞), qiymatlar sohasi esa mos ravishda E{f}=(–π/2, π/2) va E{f}=(0, π) bo`ladi. Bundan tashqari $f(x) = arc\sin x\ \ va\ f(x) = arc\ tg\ x$ toq funksiyalardir.

Ta`rif: 1-5 funksiyalar **asosiy elementar funksiyalar** deb ataladi.

Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi arifmetik va superpozitsiallash amallari orqali hosil qilingan funksiyalar **elementar funksiyalar** deyiladi. Masalan, $y = 2\ln\sin x + x^2/5$, $y = a^x \ln(x \pm 1)$ elementar funksiya bo`ladi. y={x} va y=[x] elementar bo`lmagan funksiyalarga misol bo`ladi.

Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari

Iqtisodiyotning nazariy va amaliy masalalarini o`rganishda funksiyalardan keng foydalaniladi. Masalan, ishlab chiqarish funksiyasi (ishlab chiqarish natijalarini turli omillarga bog`liqligi), xarajatlar funksiyasi (ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bilan xarajatlar o`rtasidagi bog`lanish), talab funksiyasi (mahsulotga talab hajmi va narx, foyda kabi turli omillar orasidagi bog`lanishlar) kabi funksiyalar iqtisodiyotda ko`p qo`llaniladi.

Yana bir misol sifatida aholining daromadi x va uning turli tovarlarga ehtiyoji y orasidagi bog`lanishlarni o`rganish uchun shved iqtisodchi olimi Tornkvist tomonidan taklif etilgan quyidagi funksiyalarini qaraymiz:

- $y = \dfrac{a(x-b)}{x-c} \quad (x > b)$, y – inson hayoti uchun I navbatda zarur bo`lgan oziq-ovqat mahsulotlari, kiyim-kechak kabi tovarlarga ehtiyoj ;
- $y = \dfrac{a(x-d)}{x-c} \quad (x > d > b)$, y – inson hayoti uchun II navbatda zarur bo`lgan televizor, mebel, kosmetika kabi tovarlarga ehtiyoj ;
- $y = ax\dfrac{x-m}{x-c} \quad (x > m > d > b)$, y–avtomobil, tilla bezaklar, dala hovlisi kabi qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj .

Bu funksiyalar quyidagi iqtisodiy qonuniyatlarni ifodalaydi:

✓ Daromad x ma`lum bir b, d yoki m qiymatdan oshgandan keyin tegishli tovarlarni xarid etish mumkin ;

✓ Daromad x oshib borishi bilan I va II navbatda zarur bo`lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y funksiya o`sishi sekinlashadi ;

✓ I va II navbatda zarur bo`lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y yuqoridan a soni (to`yinish nuqtasi) bilan chegaralangan, chunki ularning iste`moli cheksiz o`sishi mumkin emas;

Daromad x oshib borishi bilan qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj ham o`sib boradi va yuqoridan chegaralanmagan.

Nazorat savollari

1. Funksiyaga tushunchasiga ta`rif bering.
2. Chiziqli funksiyalar grafiklariga ta`rif.
3. Darajali, trigonometrik, ko`rsatgichli va logorifmik funksiyalarga ta`rif bering.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.
2. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014.
3. Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995.

Qo`shimcha adabiyotlar

1. V.V.Konev. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. Tomsk. TPU Press, 2009.
2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. Toshkent, 1993.

FUNKSIYA HOSILASI VA DIFFERENSIALI

REJA

- Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o`zgarish sohalari
- Funksiyaning maksimumi va minimumi
- Funksiyaning hosilasi. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari
- Funksiyaning hosilasi. Hosilani hisoblashning sodda qoidalari

Tayanch iboralar: Elementar funksiyalar. Funksiyaning aniqlanish va o`zgarish sohalari. Funksiyaning o`sishi va kamayishi. Funksiyaning maksimumi va minimumi. Hosila. Funksiya differensiali.

Funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo`lsin. Bu funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

ni argument orttirmasi Δx ga bo`lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

nisbatni qaraymiz[1].

Agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud bo`lsa, bu limit $y=f(x)$funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va y' yoki $f'(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=f'(x_0).$$

Misol. Hosila ta`rifidan foydalanib ushbu

$$y=\frac{2x+1}{3x+1}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◀Funksiya argumenti x ga Δx orttirma berib funksiya orttirmasi Δy hamda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ni topamiz:

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1}-\frac{2x+1}{3x+1}=-\frac{\Delta x}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)},$$

unda

[1] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1-qlsm, 2014. – B. 181.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{\left[3\left(x+\Delta x\right)+1\right]\left(3x+1\right)}.$$

bo`ladi.

Keyingi tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o`tsak, unda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{\left[3\left(x+\Delta x\right)+1\right]\left(3x+1\right)}\right]=-\frac{1}{\left(3x+1\right)^2}$$

bo`lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan funksiyaning hosilasi

$$y'=-\frac{1}{\left(3x+1\right)^2}$$

bo`ladi.▶

Funksiyaning x_0 nuqtadagi o`ng va chap hosilalari

Ushbu $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

limitlar mavjud bo`lsa, ular mos ravishda $f\left(x\right)$ funksiyaning $x_0$ nuqtadagi o`ng va chap hosilalari deyiladi[2][3]:

$$f'\left(x_0+0\right)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\ f'\left(x_0-0\right)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2-Misol. Ushbu

$$y=f\left(x\right)=\left|x\right|$$

funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi o`ng va chap hosilalari topilsin.

◀Ravshanki,

$$\Delta f\left(0\right)=f\left(0+\Delta x\right)-f\left(0\right)=\left|\Delta x\right|$$

bo`lib,

$$\frac{\Delta f\left(0\right)}{\Delta x}=\frac{\left|\Delta x\right|}{\Delta x}$$

bo`ladi. Limitga o`tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f\left(0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f\left(0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Demak, berilgan funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi o`ng hosilasi

$$f'\left(0+0\right)=1$$

chap hosilasi

$$f'\left(0-0\right)=-1$$

bo`ladi.▶

Eslatma. Yuqorida qaralgan $f\left(x\right)=\left|x\right|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega bo`lmaydi[4].

---

[2] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1-qIsm, 2014. – B. 182.

[3] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 102.

[4] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 103.

Hosilaning geometrik va mexanik ma`nolari

$y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi bu funksiyasi grafigiga (x_0, y_0) nuqtada o`tkazilgan urinmaning (to`g`ri chziqning) burchak koeffitsentini ifodalaydi. Urinma va normal tenglamalari mos ravishda ushbu

$$y = y_0 + f'(x_0)(x-x_0), \quad (1)$$

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad (2)$$

ko`rinishda bo`ladi.

Moddiy nuqta harakati qonuni ushbu $s=s(t)$ funksiya bilan berilganda (bunda s - o`tilgan yo`l, t -vaqt) funksiyaning t_0 nuqtadagi $s'(t_0)$ hosilasi t_0 momentdagi xarakat tezligini ifodalaydi[5].

Misol. Ushbu

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

parabolaga $M_0(1;1)$ nuqtada o`tkazilgan urinma va normalning tenglamasi topilsin.

◀Bu tenglamalarni topishda yuqoridagi (1) va (2) formulalardan foydalanamiz. Bu holda

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1, \quad f'(x_0) = f'(1)$$

Bo`ladi. Hosila ta`rifidan foydalanib $f'(1)$ ni topamiz.

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(1+\Delta x)^2 - 6\cdot(1+\Delta x) + 3 - (2\cdot 1 - 6\cdot 1 + 3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x - 2) = -2.$$

Demak, izlanayotgan urinmaning tenglamasi

$$y-(-1) = -2(x-1), \text{ ya`ni } 2x + y - 1 = 0,$$

normalning tenglamasi esa

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x-1), \text{ ya`ni } x - 2y - 3 = 0$$

bo`ladi.▶

Misol. Bo`shliqda erkin tushayotgan jism $S = \frac{gt^2}{2}$ qonun bo`yicha harakatlanadi, bunda $g \left(g \approx 980 \, {см}/{сек^2} \right)$ erkin tushayotgan jismning tezlanishi. $t = 10\,сек$ da harakat tezligi topilsin.

◀Ravshanki, bu masala $S'(10)$ ni topish bilan hal bo`ladi.

Hosila ta`rifiga ko`ra

$$S'(10) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(10+\Delta t) - S(10)}{\Delta t}$$

bo`ladi. Bu tenglikdagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(10+\Delta t) - S(10)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g\cdot(10+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}g\cdot 10^2}{\Delta t} = \frac{g}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t\cdot(20+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{g}{2}\cdot 20 = 10g.$$

Demak, harakatning $t = 10\ сек$ momentdagi tezligi

[5] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1-qIsm, 2014. – B. 183.

$$S'(10)=10\cdot g\approx 10сек\cdot 980\frac{см}{сек^2}=9800\frac{см}{сек}=98\,{}^{м}\!/_{сек}$$

bo`ladi.▶

Hosila hisoblashning sodda qoidalari

Hosila hisoblashning sodda qoidalarini keltiramiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo`lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo`lsin[6]. U holda:

1) $y=c\cdot f(x)$ bo`lsa, $y'=c\cdot f'(x)$ bo`ladi, $c-const$;

2) $y=f(x)\pm g(x)$ bo`lsa, $y'=\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$ bo`ladi;

3) $y=f(x)\cdot g(x)$ bo`lsa, $y'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)\pm f(x)\cdot g'(x)$ bo`ladi;

4) $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\left(g(x)\neq 0\right)$ bo`lsa, $y=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ bo`ladi;

5) $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ lar yordamida tuzilgan $y=f\left(\varphi(x)\right)$ funksiyaning hosilasi $y'=f'(u)\cdot u'(x)=f'\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)$ bo`ladi;

6) Agar $y=f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x=\varphi(y)$ bo`lsa, $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ bo`ladi;

Ko`pincha hosilalarni hisoblashda quyida keltirilgan jadvaldan foydalanish mumkin:

1) $\left(x^a\right)'=\alpha\cdot x^{a-1}$, $\quad\left(u^a\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$

2) $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$, $\quad\left(a^u\right)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$

3) $\left(e^x\right)'=e^x$, $\quad\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$

4) $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$, $\quad\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u}\log_a e\cdot u'$

5) $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$, $\quad\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$

6) $\left(\sin x\right)'=\cos x$, $\quad\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$

7) $\left(\cos x\right)'=-\sin x$, $\quad\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$

8) $\left(tgx\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad\left(tgu\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

9) $\left(ctgx\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad\left(ctgu\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

10) $\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

---

[6] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 104.

11) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

12) $\left(\operatorname{arc} tgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\left(\operatorname{arc} tgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

13) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Misol. Ushbu

$$y = tgx + \frac{e^x}{1+x}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◀Yig`indinig hamda nisbatning hosilasini hisoblash qoidasidan hamda jadvaldan foydalanib topamiz:

$$y' = \left(tgx + \frac{e^x}{1+x}\right)' = \left(tgx\right)' + \left(\frac{e^x}{1+x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)\left(e^x\right)' - (1+x)'\left(e^x\right)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{xe^x}{(1+x)^2}. ▶$$

Funksiya limiti

Biz sonli ketma-ketlik uchun oliy matematikaning poydevorida yotgan asosiy tushunchalaridan biri bo`lgan limit tushunchasini kiritgan edik. Endi bu tushunchani funksiya uchun umumlashtiramiz.

Ta`rif:** Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy ε>0 son uchun unga bog`liq shunday δ=δ(ε)>0 son topilsinki, 0<|x-a|<δ shartni qanoatlantiruvchi har qanday x∈D{f} va biror A soni uchun |f(x)–A|<ε tengsizlik o`rinli bo`lsa, A soni y=f(x) **funksiyaning x→a bo`lgandagi limiti deb ataladi.

Ta`rifdagi tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

ko`rinishda yoziladi. Misol sifatida,

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

ekanligini ta`rif bo`yicha ko`rsatamiz. Bu yerda x→3 bo`lgani uchun 2<x<4, ya`ni |x+3|<7 deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy ε>0 uchun

$$|f(x) - A| = |x^2 - 9| = |x+3||x-3| < 7|x-3| < \varepsilon$$

tengsizlik o`rinli bo`lishi uchun $|x-3| < \varepsilon/7$, ya`ni δ(ε)=ε/7 deb olish mumkin. Demak, limit ta`rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ tenglik o`rinli bo`ladi.

Ta`rif:** Agar har qanday katta N>0 son uchun shunday δ=δ(N)>0 son mavjud bo`lsaki, 0<|x–a|<δ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x∈D{f} uchun |f(x)|>N tengsizlik o`rinli bo`lsa, unda y=f(x) funksiya x→a (a–chekli son) bo`lganda **cheksiz limitga (+∞ yoki –∞) ega deyiladi .

Ta`rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a}$ f(x)=±∞ ko`rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x^3-8)^2} = +\infty$$

ekanligini ko`rsatish mumkin. Bu yerda $x\to 2$ bo`lgani uchun $1<x<3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan $N>0$ soni bo`yicha $\delta=\delta(N)>0$ sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2}>\frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot 3+4)^2}=$$
$$=\frac{1}{361(x-2)^2}>N\Rightarrow (x-2)^2<\frac{1}{361N}\Rightarrow |x-2|<\frac{1}{19\sqrt{N}}=\delta(N) \quad .$$

Demak, ta`rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz bo`ladi.

Ta`rif:** Agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday katta $M=M(\varepsilon)>0$ son mavjud bo`lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ va biror chekli A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo`lganda **chekli limitga ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko`rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

ekanligini ko`rsatamiz. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}=M(\varepsilon)\,,$$

ya`ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta`rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

Ta`rif:** Agar har qanday katta $N>0$ soni uchun shunday $M=M(N)$ son mavjud bo`lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo`lganda **cheksiz limitga ega deyiladi,

Ta`rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko`rinishda yoziladi.

Masalan, ta`rifdan foydalanib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ko`rsatish mumkin.

Teorema: Agar $x\to a$ bo`lganda $y=f(x)$ funksiya limiti mavjud bo`lsa, u holda bu limit yagona bo`ladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, ya`ni $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo`lganda ikkita A va B limitlarga ega bo`lsin. Unda, limit ta`rifiga ko`ra, har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ va $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlar topiladiki, $0<|x-a|<\delta_1$ va

$0<|x-a|<\delta_2$ shartlarda $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ va $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ deb olsak, unda $0<|x-a|<\delta$ bo`lganda yuqoridagi ikkala tengsizlik ham bajariladi va shu sababli, absolut qiymat xossalariga asosan,

$$|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B|\le|f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi. Bu yerda $\varepsilon>0$ ixtiyoriy kichik son bo`lganidan va A, B sonlar x ga bog`liq emasligidan $|A-B|=0$, ya`ni $A=B$ ekanligi kelib chiqadi. Demak funksiya limiti mavjud bo`lsa, u faqat yagona bo`ladi.

Ba`zi hollarda funksiyaning chap va o`ng limiti tushunchalari kerak bo`ladi.

Ta`rif:** $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir chekli a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o`ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda ($x\to a-0$ yoki $x\to a+0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo`lsa, bu sonlar funksiyaning a nuqtadagi **chap yoki o`ng limiti deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o`ng limiti

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0) \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan, **signum funksiya** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases} \quad (3)$$

funksiya uchun x=0 nuqtadagi chap va o`ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo`ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1,$$

$$\operatorname{sgn}(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1.$$

Teorema: Biror a nuqtada y=f(x) funksiya x→a bo`lganda chekli A limitga ega bo`lishi uchun uning shu a nuqtadagi chap va o`ng limitlari o`zaro teng va f(a–0)= f(a+0)=A shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning isboti bevosita yuqorida ko`rib o`tilgan limit ta`riflaridan kelib chiqadi va o`quvchiga havola etiladi.

Shuni ta`kidlab o`tish kerakki, funksiya limiti har doim ham mavjud bo`lavermaydi. Masalan, y=sgn(x) funksiya x→0 bo`lganda limitga ega emas, chunki bu holda

$$sgn(0-0)=-1 \;\; va \;\; sgn(0\pm 0)=1 \quad bo'lib,\; sgn(0-0)\neq sgn(0\pm 0).$$

Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari

Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

Ta`rif: Agar $\alpha(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya x→a (a–ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo`lganda **cheksiz kichik miqdor** deb ataladi .

Masalan, $\alpha(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$, $\alpha(x)=(x-3)^2$ funksiya $x\to 3$ va $\alpha(x)=x^{-2}$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo`lganda cheksiz kichik miqdor bo`ladi.

Teorema: Agar x→a bo`lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo`lib, f(x) esa ixtiyoriy chegaralangan funksiya bo`lsa, u holda x→a bo`lganda $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$, $f(x)\cdot\alpha(x)$, $C\alpha(x)$ $(C=conct$, ya`ni o`zgarmas son) funksiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar bo`ladi.

Isbot: x→a bo`lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar, ya`ni

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\beta(x)=0$$

bo`lgani uchun, limit ta`rifiga asosan, ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki, $0<|x-a|<\delta$ shartda $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$, $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bir paytda

o`rinli bo`ladi. Agar $|f(x)|\le M$ (M– biror chekli son) bo`lsa, unda $0<|x-a|<\delta$ shartda

$$|\alpha(x)\pm\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<(\varepsilon/2)=\varepsilon,$$

$$|\alpha(x)\cdot\beta(x)|=|\alpha(x)|\cdot|\beta(x)|<(\varepsilon/2)\cdot(\varepsilon/2)=\varepsilon^2/4,$$

$$|f(x)\cdot\alpha(x)|=|f(x)|\cdot|\alpha(x)|<|M|\varepsilon/2,\qquad |C\alpha(x)|=|C|\cdot|\alpha(x)|<|C|\varepsilon/2$$

tengsizliklar o`rinli bo`ladi. Bu tengsizliklar va funksiya limiti ta`rifiga asosan

$$\lim_{x\to a}[\alpha(x)\pm\beta(x)]=0,\quad \lim_{x\to a}[\alpha(x)\cdot\beta(x)]=0,$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\alpha(x)]=0,\quad \lim_{x\to a}C\alpha(x)=0$$

natijalarni olamiz. Bu yerdan, cheksiz kichik miqdor ta`rifiga asosan, teorema isboti kelib chiqadi.

Natija: Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig`indisi, ko`paytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat bo`ladi.

Bu natijaning isboti oldingi teoremani bir necha marta qo`llash orqali keltirib chiqariladi.

Izoh: Agar $x \to a$ bo`lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo`lsa, unda ularning nisbati $\alpha(x)/\beta(x)$ cheksiz kichik miqdor bo`lishi shart emas.

Masalan, $x \to 0$ bo`lganda $\alpha(x)=Ax^n$ va $\beta(x)= Bx^m$ (n,m–natural, A,B– noldan farqli ixtiyoriy haqiqiy sonlar) cheksiz kichik miqdorlar bo`ladi va

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax^n}{Bx^m}=\lim_{x\to 0}\frac{A}{B}x^{n-m}=\begin{cases} 0\,, & n>m\,;\\ A/B\,, & n=m\,;\\ \pm\infty\,, & n<m\,.\end{cases}$$

Bu yerdan ko`rinadiki, yuqoridagi misolda $\alpha(x)/\beta(x)$ nisbat faqat n>m bo`lganda cheksiz kichik miqdor bo`ladi.

**Ta`rif:** $x \to a$ bo`lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar va

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

bo`lsin. Bunda A=0 bo`lsa, $\alpha(x)$ $x \to a$ bo`lganda $\beta(x)$ ga nisbatan **yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor** deyiladi va $\alpha(x)=o(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Agar $A\neq 0$ va chekli son bo`lsa, unda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ **bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar** deyiladi va $\alpha(x)=O(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Jumladan A=1 bo`lsa $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ **ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar** deyiladi va $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi. Agar $A=\pm\infty$ bo`lsa, $\alpha(x)$ $x \to a$ bo`lganda $\beta(x)$ ga nisbatan **quyi tartibli cheksiz kichik miqdor** deyiladi va $\beta(x)=o(\alpha(x))$ kabi belgilanadi.

Cheksiz katta miqdorlar

Endi cheksiz katta miqdor tushunchasi va uning xossalari bilan tanishamiz.

Ta`rif: Agar f(x) funksiya uchun

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x \to a$ (a–ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo`lganda **cheksiz katta miqdor** deb ataladi.

Masalan, f(x)=tgx funksiya $x\to\pi/2$, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to 1$ va $f(x)=x^2$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo`lganda cheksiz katta miqdor bo`ladi.

Teorema: Agar f(x) va g(x) funksiyalar $x \to a$ bo`lganda cheksiz katta miqdorlar bo`lsa, unda $x \to a$ shartda quyidagi tasdiqlar o`rinlidir:

1) $|f(x)|+|g(x)|$ va $f(x)\cdot g(x)$ cheksiz katta miqdor bo`ladi;

2) Agar $\lim\limits_{x\to a} h(x)\neq 0$ bo`lsa, unda $f(x)\cdot h(x)$ va f(x)/h(x) cheksiz katta miqdor bo`ladi;

3) Ixtiyoriy C o`zgarmas soni va chegaralangan ϕ(x) funksiya uchun Cf(x) va φ(x)f(x) funksiyalar cheksiz katta miqdor bo`ladi.

Teoremaning isboti bevosita ta`rifdan kelib chiqadi va uning ustida to`xtalib o`tirmaymiz.

Izoh: Yuqoridagi teorema shartlarida $|f(x)|-|g(x)|$ va f(x)/g(x) funksiyalar cheksiz katta miqdor bo`lishi shart emas. Bu funksiyalar $x \to a$ bo`lganda mos ravishda $\infty-\infty$ va ∞/∞ ko`rinishdagi aniqmasliklar deyiladi va ular kelgusida (VIII bob, §6) to`liqroq ko`rib chiqiladi.

Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar orasidagi bog`lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

Teorema: Agar f(x) funksiya $x \to a$ bo`lganda cheksiz katta miqdor bo`lsa, unda shu holda 1/f(x) funksiya cheksiz kichik miqdor bo`ladi. Aksincha, agar $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ bo`lganda cheksiz kichik miqdor bo`lsa, unda shu holda $1/\alpha(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor bo`ladi.

Bu teoremani ham isbotsiz qabul etamiz. Masalan, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to 1$ bo`lganda cheksiz katta miqdor, $\alpha(x)=1/f(x)=(x-1)^3$ funksiya esa $x\to 1$ bo`lganda cheksiz kichik miqdor bo`ladi. Shu sababli kelgusida biz asosan cheksiz kichik miqdorlar bilan ish ko`ramiz.

Funksiya limitini hisoblash qoidalari

Funksiya limitini uning ta`rifi bo`yicha hisoblash har doim ham oson emas. Shu sababli funksiya limiti asosan uni hisoblash qoidalari yordamida topiladi.

Lemma: y=f(x) funksiya x→a bo`lganda chekli A limitga ega bo`lishi uchun uni f(x)=A+α(x) ko`rinishda bo`lishi zarur va yetarli. Bunda α(x) funksiya x→a bo`lganda biror cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta`riflaridan kelib chiqadi.

Asosiy teorema: Agar x→a bo`lganda f(x) va g(x) funksiyalar chekli A va B limitlarga ega bo`lsa, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=A\pm B \quad (4)$$

$$\lim_{x\to a}Cf(x)=C\lim_{x\to a}f(x)=CA \text{ (C=const.) } (5)$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=A\cdot B \quad (6)$$

va, agar $\lim\limits_{x\to a}$ g(x)=B≠0 bo`lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{A}{B} \quad (7)$$

tengliklar o`rinlidir.

Isbot: Teorema shartlari va lemmaga asosan f(x)=A+α(x), g(x)=B+β(x) tengliklarni yoza olamiz. Bu yerda α(x) va β(x) funksiyalar x→a bo`lganda cheksiz kichik miqdorlardir. Bu tengliklardan foydalanib

$$f(x)\pm g(x)=[A+\alpha(x)]\pm[B\pm\beta(x)]=(A\pm B)+[\alpha(x)\pm\beta(x)]$$

natijani olamiz. Cheksiz kichik miqdorlar xossasiga asosan bu yerda γ(x)=α(x) ±β(x) funksiya x→a bo`lganda cheksiz kichik miqdor bo`ladi. Bu holda yuqoridagi tenglikdan va lemmaga asosan

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o`rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Teoremadagi qolgan tengliklar ham shu tarzda isbotlanadi.

Asosiy teoremada keltirilgan limit hisoblash qoidalari va f(x)=C (C-const) o`zgarmas funksiyaning limiti shu sonni o`ziga teng bo`lishidan foydalanib, murakkabroq limitlarni soddaroq limitlarga keltirish orqali hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\lim_{x\to1}x^2e^x=\lim_{x\to1}x^2\cdot\lim_{x\to1}e^x=1\cdot e=e\,,\quad \lim_{x\to1}(x^2+e^x)=\lim_{x\to1}x^2+\lim_{x\to1}e^x=1+e\,,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}e^x}{\lim\limits_{x\to1}x^2}=\frac{e}{1}=e\,,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x})=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=2-0=2\,.$$

Funksiya limitining mavjudlik shartlari

Yuqorida ko`rsatilganidek, funksiya har doim ham limitga ega bo`lavermaydi. Shu sababli funksiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko`rishga to`g`ri keladi. Oldin bu savolga chap va o`ng limitlar orqali (2-teoremaga qarang) javob berilgan edi. Endi bu savol bo`yicha quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

Teorema: Agar x=a nuqtaning biror atrofida φ(x)≤f(x)≤ψ(x) qo`sh tengsizlik o`rinli bo`lib, x→a bo`lganda φ(x) va ψ(x) funksiyalarining chekli limitlari mavjud va

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\Psi(x)=A$$

shart bajarilsa, u holda x→a bo`lganda f(x) funksiya uchun ham chekli limit mavjud bo`lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ munosabat o`rinli bo`ladi.

Masalan, barcha x≠0 uchun

$$-\frac{1}{x^2} \le \frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

Teorema: Agarda x=a nuqtaning biror atrofida y=f(x) funksiya o`suvchi (yoki kamayuvchi) bo`lib, yuqoridan (yoki quyidan) biror M (yoki m) soni bilan chegaralangan bo`lsa, u holda bu funksiya x→a bo`lganda limitga ega va bu limit uchun

$$\lim_{x\to a} f(x) \le M \quad (\text{yoki} \lim_{x\to a} f(x) \ge m)$$

munosabatlar o`rinli bo`ladi.

Masalan, x>1 bo`lganda

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^2}{x^4} = 2 + \frac{3}{x^2}$$

funksiya kamayuvchi va quyidan m=2 soni bilan chegaralangan. Bu yerda

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2 + \frac{3}{x^2}) = 2$$

bo`lib, teorema tasdig`i o`rinlidir.

Ajoyib limitlar

Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (I)}, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281\ldots \text{ (II)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x} = a \text{ (III)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ (IV)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \text{ (V)}.$$

Bu tengliklar matematikada **ajoyib limitlar** deb ataladi va ularning isboti keyinchalik beriladi.

Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig`i. Endi funksiya limiti tushunchasini bir iqtisodiy masalani yechish uchun tatbiq etamiz.

Bankka yillik R foiz ustama to`lash sharti bilan omonatga qo`yilgan jamg`armaning boshlang`ich qiymati a_0 bo`lsa, ustama n-marta hisoblangandan keyin uning qiymati

$$a_n = (1+i)^n a_0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

formula bilan topilishi ko`rsatilgan edi. Bunda i=R/k bo`lib, k–yillik R foiz ustama jamg`armaga yil davomida necha martada hisoblanishini ifodalaydi.

Endi bank jamg`armaga R foiz ustamani yil davomida uzluksiz ravishda hisoblab borganda, jamg`arma qiymati qanday aniqlanishini ko`rib chiqamiz. Bu holda k → ∞ bo`ladi va har qanday k uchun t=n/k omonatga jamg`arma qo`yilgandan keyin o`tgan yillar sonini ifodalaydi. Bu holda yuqoridagi a_n uchun formula va (II) ajoyib limit yordamida quyidagi natijani olamiz:

$$a_t = \lim_{k\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}(1+i)^n a_0 = a_0 \lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^n = a_0 \lim_{k\to\infty}\left\{(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{R\frac{n}{k}} =$$

$$= a_0\left\{\lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{Rt} = a_0\left\{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\right\}^{Rt} = a_0 e^{Rt}.$$

Bu yerda $k/R = x$, $k \to \infty \Rightarrow x \to \infty$ ekanligidan foydalanilgan. Demak, jamg`armaga bankning yillik R foiz ustamasi uzluksiz tarzda hisoblab borilsa, uning t yildan keyingi qiymati $a_t=a_0e^{Rt}$ formula bilan aniqlanadi va ko`rsatkichli funksiya orqali ifodalanadi.

Funksiyaning differinsiali

Agar $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo`lsa, u shu nuqtada differensiallanuvchi funksiya deyiladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo`lsin. Unda bu funksiya ortirmasi

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad (8)$$

ni quyidagicha yozish mumkin:

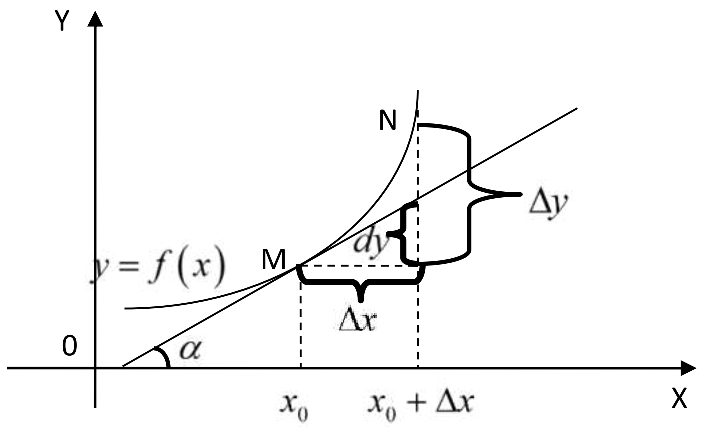
$$\Delta y = f'(x)\cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$[7].

(8) munosabatdagi $f'(x)\cdot \Delta x$ ifoda $y = f(x)$funksiyaning differensiali deyiladi va dy yoki $df(x)$ kabi yoziladi:

$$dy = y'\cdot \Delta x \qquad (\Delta x = dx), \qquad dy = y'\cdot dx$$

Funksiya differensiali urinma orttirmasi bo`ladi. Bu differensialning geometrik ma`nosidir (5.1-shakl).



5.1-shakl

Funksiya differensialining asosiy xossalari

Differensial hisob oliy matematikaning eng asosiy va eng kuchli, samarali usullaridan biri bo`lib hisoblanadi. Matematik tahlilning bu bo`limi nisbatan yosh bo`lib, uning dastlabki kurtaklari XVII asrda Ferma, Paskal, Dekart kabi matematiklarning ishlarida shakllangan va XVIII asrda buyuk ingliz olimi Nyuton (1642-1727) va mashhur olmon matematigi Leybnits (1646-1716) tomonidan unga asos solingan va turli masalalarni yechish uchun keng qo`llanilgan.

Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar. Differensial hisob asosida funksiya hosilasi tushunchasi yotadi va u tarixan quyidagi amaliy masalalarni yechish jarayonida paydo bo`lgan.

❖ **Oniy tezlik masalasi.** Bizga ma`lumki, to`g`ri chiziq bo`yicha tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi tezligi $v(t)=v_0=const$, ya`ni o`zgarmas bo`ladi. Bunda harakat boshlangandan keyin t vaqt o`tgach nuqtaning bosib o`tgan masofasi $S(t)=vt$ funksiya

[7] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 105.

bilan aniqlanadi va **harakat tenglamasi** deb ataladi. Endi bu nuqta to`g`ri chiziq bo`yicha notekis harakatda bo`lgan holni qaraymiz. Bu holda moddiy nuqtaning tezligi t vaqt o`tishi bilan o`zgarib boradi va biror v=v(t) funksiyani hosil qiladi. Moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi tezligi **oniy tezlik** deb ataladi. Biz notekis harakat tenglamasi S=S(t) ma`lum bo`lgan taqdirda moddiy nuqtaning biror t_0 vaqtdagi $v_0=v(t_0)$ oniy tezligini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun ikkinchi bir $t=t_0+\Delta t$ vaqtni qaraymiz. Unda moddiy nuqtaning ko`rilayotgan $(t_0,\ t)=(t_0, t_0+\Delta t)$ vaqt oralig`ida bosib o`tgan masofasi

$$\boldsymbol{S(t)-S(t_0)=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)=\Delta S},$$

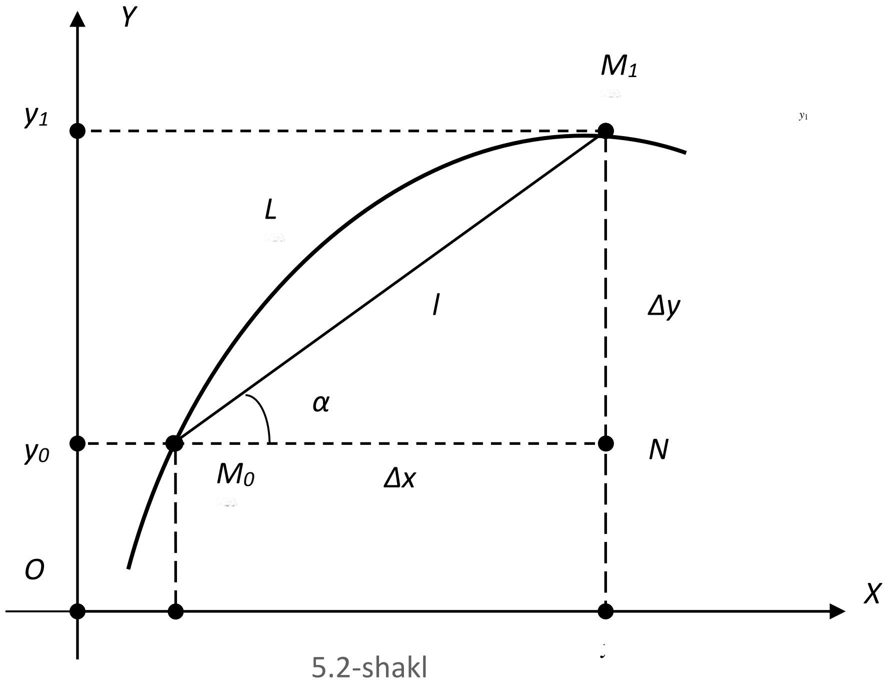
ya`ni harakat tenglamasini ifodalovchi S=S(t) funksiyaning orttirmasiga teng bo`ladi. Agar notekis harakatdagi moddiy nuqtaning bu vaqt oralig`idagi o`rtacha tezligini $\bar{v}(\Delta t)$ deb belgilasak, uning qiymati $\bar{v}(\Delta t)=\Delta S/\Delta t$ formula bilan aniqlanadi. Bu holda $v(t_0)$ oniy tezlik $\bar{v}(\Delta t)$ o`rtacha tezlikning $t\rightarrow t_0$ , ya`ni $\Delta t\rightarrow 0$ bo`lgandagi limiti kabi aniqlanadi. Demak, notekis harakatda $v(t_0)$ oniy tezlik

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (9)$$

limitni hisoblash orqali topiladi.

❖ **Urinma masalasi.** Dastlab tekislikdagi berilgan L chiziqning $M_0(x_0,\ y_0)$ nuqtasiga o`tkazilgan urinma tushunchasini kiritamiz.

Berilgan L chiziqda yotuvchi ikkita M_0 va M_1 nuqtalarni tutashtiruvchi M_0M_1 kesma **vatar** deb ataladi (5.2-shakl).



5.2-shakl

Bu vatar yotgan to`g`ri chiziq M_0 nuqtadan o`tgani uchun uning tenglamasi (9)

$$y-y_0=k(x-x_0)\,,\quad k=tg\alpha=\frac{|NM_1|}{|NM_0|}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ko`rinishda bo`ladi.

Ta`rif:** Agar L chiziqning $M_0M_1$ vatari yotgan l to`g`ri chiziq $M_1$ nuqta L chiziq bo`ylab M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashib borganda ($M_1\rightarrow M_0$) biror l_0 to`g`ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa ($l\rightarrow l_0$), unda l_0 berilgan L chiziqning M_0 nuqtadagi **urinmasi deyiladi.

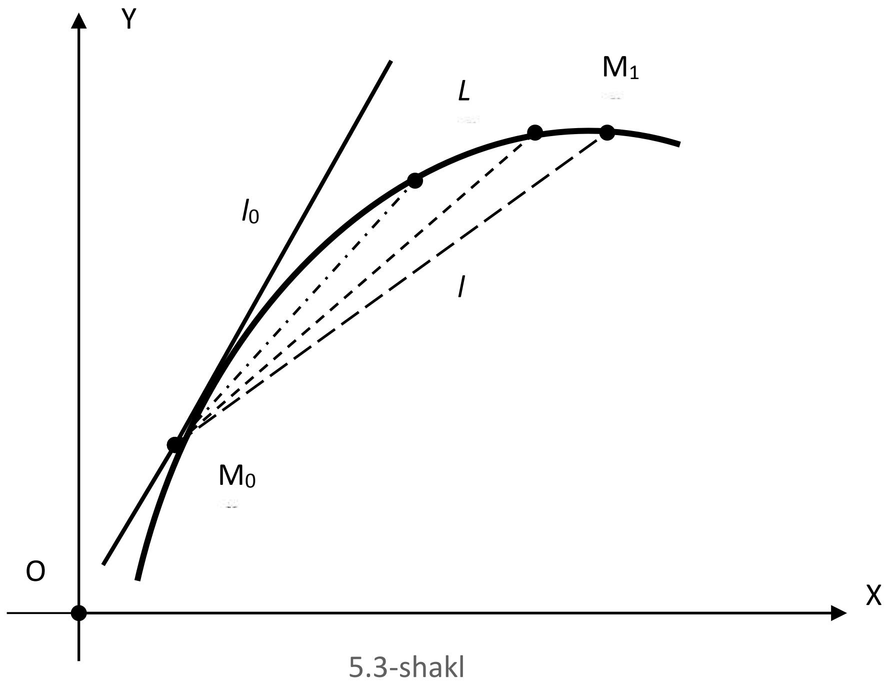
Egri chiziqning $M_0(x_0,\ y_0)$ nuqtadagi urinmasi shu nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq bo`lgani uchun (5.3-shakl) uning ham tenglamasi vatar tenglamasi singari $y-y_0=k_0(x-x_0)$ ko`rinishda bo`ladi. Bu tenglamadagi k_0 burchak koeffitsiyentini topish uchun L chiziq tenglamasini ifodalovchi y=ϕ(x) funksiya berilgan deb hisoblaymiz. Urinma ta`rifiga asosan

$$M_1 \to M_0 \Rightarrow x_1 \to x_0 , y_1 \to y_0 \Rightarrow \Delta x \to 0 , \Delta y \to 0$$

bo`lgani uchun M_0M_1 vatarning k burchak koeffitsiyenti uchun yuqorida keltirilgan formulaga asosan

$$k_0 = \lim_{M_1 \to M_0} k = \lim_{M_1 \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \quad (10)$$

natijani olamiz.



5.3-shakl

❖ **Mehnat unumdorligi masalasi.** Ishchining ish kuni davomidagi mehnat unumdorligi o`zgaruvchi miqdor bo`ladi. Ertalab ish kuni boshlangach, ma`lum bir paytgacha u ishga kirishish jarayonida bo`lib, bu davrda uning mehnat unumdorligi oshib boradi. So`ngra ma`lum bir vaqt davomida ishchi deyarli bir xil mehnat unumdorligi bilan ishini davom ettiradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari toliqish natijasida ishchining mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib, ish kuni davomida t vaqt o`zgarib borishi bilan ishchining mehnat unumdorligi biror z=z(t) funksiya orqali ifodalanadi. Uni topish uchun ishchining ish kuni boshlangandan keyin t vaqt o`tgach ishlab chiqargan mahsulot hajmini ifodalovchi h=h(t) funksiya ma`lum deb olamiz. Bu funksiya yordamida ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topamiz. Bu maqsadda ish kunining $t_0$ $va$ $t_1 = t_0 + \Delta t$ vaqt oralig`ini qaraymiz. Bu vaqt oralig`ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $h(t_0 + \Delta t) - h(t_0) = \Delta h$ kabi aniqlanadi. U holda uzunligi $\Delta t$ bo`lgan bu vaqt oralig`idagi ishchining o`rtacha mehnat unumdorligi $\bar{z}(\Delta t) = \Delta h / \Delta t$ nisbat orqali aniqlanadi. Bu yerdan ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topish uchun $\Delta t \to 0$ deb olishimiz kerak va natijada

$$z(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{z}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (11)$$

formulaga ega bo`lamiz.

Bu uchala masala mazmunan turlicha bo`lsa ham, ularni yechish bir xil matematik usulda amalga oshirilganligi va bu yechimlar (9)-(11) formulalar orqali bir xil ko`rinishida ifodalanganligini ta`kidlab o`tamiz.

Hosila ta`rifi va uning amaliy ma`nolari

Yuqoridagi masalalarni yechish uchun amalga oshirilgan ishlarni umumiy holda qaraymiz. Bizga biror y=f(x) funksiya berilgan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga kiruvchi x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argument qiymatlarini qaraymiz, ya`ni $x_0$ nuqtada argumentga $\Delta x$ orttirma beramiz. Argumentning bu $\Delta x$ orttirmasiga mos keluvchi y=f(x) funksiyaning $\Delta y = \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ orttirmasini topamiz. So`ngra Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatini $\Delta x \to 0$ holdagi limitini hisoblaymiz.

Ta`rif:** Berilgan y=f(x) funksiyaning $\Delta f$ orttirmasining $\Delta x$ argument orttirmasiga nisbati $\Delta x \to 0$ bo`lganda chekli limitga ega bo`lsa, bu limit qiymati **funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi.

Berilgan y=f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va, ta`rifga asosan,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (12)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini uning ta`rifiga asosan topamiz:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 =>$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Demak, $(x^2)'=2x$. Shunday tarzda $x'=1$ va $(x^3)'=3x^2$ ekanligini ko`rsatish mumkin.

Oldin ko`rilgan masalalarning javoblarini kiritilgan hosila tushunchasi orqali ifodalaymiz. Harakat tenglamasi S=S(t) funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 vaqtdagi oniy tezlik uchun topilgan (9) natijadan

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0) \quad (13)$$

formulani hosil qilamiz.

Demak, y=f(x) funksiyaning hosilasi uning o`zgarish tezligini ifodalaydi va bu **hosilani mexanik ma`nosi** deyiladi. Nyuton hosila tushunchasiga mana shu yo`nalishdagi tadqiqotlari orqali kelgan va uni "flyuktsiya" deb atagan. Shuni ta`kidlab o`tish kerakki, bu yerda "tezlik" tushunchasi faqat harakat tezligini ifodalamasdan, u keng ma`noda tushuniladi. Masalan, ximiyaviy reaksiya tezligi, texnologik jarayon tezligi, iqtisodiy islohotlarni amalga oshirish tezligi va hokazo.

Endi y=ϕ(x) funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0, y_0) = M_0(x_0,\ \varphi(x_0))$ nuqtasiga o`tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi (10) formulani eslab, undan

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \varphi'(x_0) \quad (14)$$

natijaga kelamiz.

Demak, y=f(x) funksiyaning hosilasi uning grafigini $M_0(x_0, y_0) = M_0(x_0,\ f(x_0))$ nuqtasiga o`tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu **hosilani geometrik ma`nosi** deyiladi. Nyutonning hosila bo`yicha ishlaridan bexabar holda Leybnits mana shunday geometrik masalalarni yechish jarayonida hosila tushunchasiga kelgan.

Shunday qilib, y=f(x) funksiya grafigining $M_0(x_0, y_0) = M_0(x_0,\ f(x_0))$ nuqtasiga o`tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (15)$$

ko`rinishda topiladi.

Misol sifatida f(x)=x^2 parabolaning x_0=3 abssissali nuqtasiga o`tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0)=f(3)=3^2=9,\ \ f'(x_0)=2\ \ x^0=2\cdot 3=6$ va shu sababli, (12) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi

y=6(x–3)+9 => y=6x–9

ko`rinishda bo`ladi.

Mehnat unumdorligi to`g`risidagi masalaning (11) javobini hosila orqali

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=h'(t_0) \quad (16)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Demak, y=f(x) funksiya x vaqtgacha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalasa, uning hosilasi f ′(x) shu x vaqtdagi mehnat unumdorligini ifodalaydi va buni **hosilaning iqtisodiy ma`nosi** deb qarash mumkin.

Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi

Dastlab differensiallanuvchi funksiya tushunchasini kiritamiz.

Ta`rif:** Agar y=f(x) funksiya x nuqtada chekli f ′(x) hosilaga ega bo`lsa, u shu nuqtada **differensiallanuvchi deyiladi. Aks holda y=f(x) funksiya x nuqtada **differensiallanmovchi** deb ataladi. Funksiyani f ′(x) hosilasini topish amali **differensiallash amali** deb ataladi.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi va uzluksizligi orasidagi bog`lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

Teorema: Agarda y=f(x) funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo`lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo`ladi.

Isbot: Teoremani isbotlash uchun, funksiyaning uzluksizligi ta`rifiga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0 \quad (17)$$

shart bajarilishini ko`rsatish kifoya. Hosila ta`rifini ifodalovchi (11) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko`rib o`tilgan lemmaga asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)\Rightarrow \Delta f=(f'(x)+\alpha(\Delta x))\Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerda Δx→0 bo`lganda α(Δx) cheksiz kichik miqdor bo`ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x)+\alpha(\Delta x))\Delta x=f'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x=f'(x)\cdot 0+0=0\,.$$

Demak, (16) shart o`rinli va shu sababli f(x) funksiya x nuqtada uzluksiz bo`ladi.

Izoh: Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o`rinli emas. Masalan, f(x)=|x| funksiya x=0 nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Haqiqatan ham, x=0 nuqtada argumentga Δx orttirma berganimizda funksiya orttirmasi uchun Δf=f(0+Δx)–f(0)= f(Δx)= |Δx| tenglik o`rinli bo`ladi. Bu yerdan ko`rinadiki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0\,,$$

ya`ni f(x)=|x| funksiya x=0 nuqtada uzluksiz. Ammo

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\,,\ \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\,.$$

Bu yerdan ko`rinadiki Δx→0 bo`lganda Δf/Δx nisbat limitga ega emas va shu sababli x=0 nuqtada f ′(0) hosila mavjud emas.

Ta`rif:** Berilgan y=f(x) funksiya (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida differensiallanuvchi bo`lsa, u shu **oraliqda differensiallanuvchi deb ataladi.

Masalan, y=x^2 funksiya har qanday (a,b) oraliqda differensiallanuvchi. y=$|x|$ funksiya esa x=0 nuqtani o`z ichiga olmaydigan barcha oraliqlarda differensiallanuvchi, ammo x=0 nuqtani o`z ichiga oluvchi oraliqlarda differensiallanuvchi bo`lmaydi.

1) $d(c\cdot y)=c\cdot dy, \quad c=const$

2) $d(y\pm u)=dy\pm du,$

3) $d(y\cdot u)=udy+ydu,$

4) $d\left(\dfrac{y}{u}\right)=\dfrac{udy-ydu,}{u^2} \quad (u\neq 0),$

5) $df(u)=f'(u)du.$

Hosilalar jadvali va hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

1. $y=x^4+2x^3-6x^2+2x+1$
2. $y=-7x^2+6$
3. $y=\dfrac{1}{2}x^2+4x+17$
4. $y=\dfrac{1}{n}x^n+nx+n$
5. $y=\dfrac{e}{x}+\ln 3$
6. $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1$
7. $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{8}{x^4}$
8. $y=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+10$
9. $y=3x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-.3}$
10. $y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{b}{\sqrt[5]{x^3}}$
11. $y=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4}{x^4}$
12. $y=\dfrac{2x^3+3x^2+4x+5}{5}$
13. $y=x^3(2x^2+x+1)$
14. $y=(x^3+5)(5x^2-7)$

Murakkab funksiyalarning hosilalarni hisoblash qoidasidan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

1. $y=(1+3x)^{25}$
2. $y=(3+2x^2)^{10}$
3. $y=\sqrt{1-x^2}$, b) $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$
4. $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$, b) $y=\sqrt[3]{x^2-6x}$

5. $y = 2^{\frac{1}{x}}$, b) $y = e^{\sqrt{x}}$

Nazorat savollari

1. Funksiyaaning hosilasiga ta`rif bering.
2. Hosili hisoblashning sodda qoidalarini aytib bering.
3. Funksiyaning differinsialiga ta`rif bering.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.
2. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014.
3. Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995.

Qo`shimcha adabiyotlar

1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. Toshkent, 1993.
2. Луре Л.И. Основы высшей математики. Москва, 2003.
3. Курганов К.А. Варианты домашних и контролных работ по высшей математике, УзМУ, 2005.

Internet saytlari

1. http://library.ziyonet.uz/uz
2. http://library.uz-djti.uz/

INTEGRAL

REJA

Boshlang‘ich funksiya
Aniqmas integral
Integrallash jadvali

O‘zgaruvchini almashtirish usuli bilan integrallash

Trigonometrik funksiyalarni integrallash
Aniq integral, xossalari
Nyuton-Leybnits formulasi

Integral – har xil jarayon va hodisalarning hajmdor quyilmasi bo`lib, bu mo`jizani yaratgan Leybnits va Nyuton ijodiy fantaziyasining aqlga sig`maydigan portlashining mevasidir.

Feynberg E.L.

Tayanch iboralar: Boshlang`ich funksiya. Aniqmas integral. Integrallash jadvali. Bo`laklab integrallash. Trigonometrik funksiyalarni integrallash. Aniq integral. Aniq integralning geometrik ma`nosi. Nyuton-Leybnits formulasi.

Boshlang`ich funksiya

Bizga $y = f(x)$ funksiya berilgan bo`lsin. Bu funksiyaning hosilasini topish amaliga funksiyani differensiallash deyiladi. Masalan, harakatning $s = f(t)$ berilgan bo`lsa, buni t bo`yicha differensiallash bilan tezlikni topamiz. Yana bu tezlikni t bo`yicha differensiallasak $v = v(t)$ tezlanishni topamiz. Biroq, amalda teskari masalani ham echishga to`gri keladi: ya`ni $a = a(t)$ tezlanish t vaqtning funksiyasi sifatida berilgan bo`lib, t vaqtda o`tilgan s yo`lni va v tezlikni aniqlash so`raladi.

Shunday qilib, bu yerda hosilasi $a = a(t)$ bo`lgan $v = v(t)$ funksiyani topib, so`ngra hosilasi v bo`lgan s=s(t) funksiyani topish kerak[1].

Ko`p masalalarda noma`lum funksiyaning berilgan hosilasi bo`yicha o`zini topishga to`gri keladi.

Agar f(x) funksiya berilgan bo`lsa, shunday F(x) funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan funksiyaga teng bo`lsin, ya`ni

$$F'(x) = f(x)$$

Ta`rif:** Agar $[a, b]$ kesmaning har bir nuqtasida $F'(x) = f(x)$ tenglik o`rinli bo`lsa, u holda F(x) funksiya berilgan f(x) funksiyaning **boshlang`ich funksiyasi deyiladi[2].

Agar f(x) funksiya F(x) boshlang`ich funksiyaga ega bo`lsa, bunda f(x) ning boshqa xar qanday boshlang`ich funksiyasi F(x) dan o`zgarmasga farq qiladi.

---

[1] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 109.
[2] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to’plami. 1-qism, 2014. – B. 212.

Masalan, F(x) berilgan f(x) funksiyaning boshlang`ich funksiyasi bo`lsin. F(x) f(x) ning boshqa boshlang`ich funksiyasi bo`lsin; bunda $F(x) = F(x) + C$ bu yerda C-o`zgarmas miqdor. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar F(x) f(x) ning boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, u holda $F(x)+C$ ham f(x) ni boshlang`ich funksiyasi bo`lib, u f(x) ning barcha boshlang`ich funksiyalar to`plamini tashkil etadi. Bundan kelib chiqadiki f(x) funksiyaning boshlang`ich funksiyalari cheksiz ko`p bo`lar ekan[3].

Endi aniqmas integral ta`rifini keltiramiz.

**Ta`rif:** Agar F(x) funksiya f(x) funksiyaning boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, u holda $F(x)+C$ ifoda ham boshlang`ich funksiya bo`lib, f(x) funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ ko`rinishda belgilanadi[4].

Bunda f(x)-integral ostidagi funksiya, $\int$ belgi integral belgisi deyiladi. Shunday qilib, aniqmas integral $y = F(x)+C$ funksiyalar to`plamidan iborat bo`ladi.

Aniqmas integralning geometrik ma`nosi, tekislikdagi chiziq (to`gri yoki egri chiziq)lar oilasidan iborat bo`lib, bular bir chiziqning o`ziga parallel holda OY o`qi bo`ylab, pastga yoki yuqoriga siljitishdan iborat bo`ladi. (argumentni manfiy yoki musbat qiymatlarni qabul qilishiga qarab).

Har qanday uzluksiz funksiyani boshlang`ich funksiyasi mavjud bo`ladi. Demak bunday funksiyani aniqmas integrali mavjuddir.

Funksiyani integrallash deyilganda uning boshlang`ich funksiyasini topish tushuniladi. Shu sababli biror funksiyani integrallaganda topilgan boshlang`ich funksiyasidan hosila olib, integrallash natijasi tekshiriladi.

Aniqmas integralning xossalari

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
2. $\int df(x) = f(x) + C$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad (a, b - const)$
4. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$
5. Bir necha funksiyalar algebraik yig`indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar integrallarining algebraik yig`indisiga teng, ya`ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1 dx + \int f_2 dx + ... + \int f_n dx$$

6. O`zgarmas ko`paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

Bu xossalarni integral ta`rifidan foydalanib osongina isbotlash mumkin. Buni isboti talabalarga topshiriladi.

Integrallar jadvali

Endi integrallar jadvalini keltiramiz. Xosilalar jadvalidan integrallar jadvali bevosita kelib chiqadi. Jadvalda keltirilgan tengliklarni to`griligini differensiallash yo`li bilan tekshirish, ya`ni tenglikni o`ng tomonidagi funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaga tengligini aniqlash mumkin[5].

---

[3] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 112.
[4] Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1-qism, 2014. – B. 212.
[5] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 114.

“Integral” mavzusi bo`yicha asosiy formulalar

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1);$ $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{n}{m+n} \sqrt[n]{x^{m+n}} + C;$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$ $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln|a+bx| + C;$

3. $\int e^x dx = e^x + C;$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ $\int \sin(a+bx)dx = -\frac{1}{b}\sin(a+bx) + C;$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$ $\int \cos(a+bx)dx = \frac{1}{b}\cos(a+bx) + C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$ $\int \frac{dx}{\sin^2(a+bx)} = -\frac{1}{b} ctgx(a+bx) + C;$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$ $\int \frac{dx}{\cos^2(a+bx)} = \frac{1}{b} tg(a+bx) + C;$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases};$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases};$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases};$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases};$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

11. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C;$ $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C;$ $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C;$

12. Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo`lsa, $\int f(a+bx)dx = \frac{1}{b}F(a+bx) + C;$

13. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C;$

14. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$

15. $\int shxdx = chx + C;$ $\int chxdx = shx + C;$ $\int thxdx = \ln chx + C;$ $\int cthxdx = \ln|shx| + C;$

Yuqorida keltirilgan aniqmas integralning xossalaridan va integrallar jadvalidan foydalanib, aniqmas integralni hisoblash mumkin.

Aniqmas integralni hisoblash usullari

Aniqmas integralni hisoblashda integral ostidagi funksiyaning boshlang`ich funksiyasi topiladi. Bu boshlang`ich funksiya yuqorida keltirilgan integral xossalaridan hamda integrallar jadvalidan foydalanib topiladi. Bundan tashqari integrallashda o`zgaruvchini almashtirish va bo`laklab integrallash usullaridan foydalaniladi[6].

[6] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.P.115

O`zgaruvchini almashtirish yoki o`rniga qo`yish usuli

Bu usul bilan integrallashda o`zgaruvchi x yangi o`zgaruvchi t bilan ma`lum munosabatda shunday almashtiriladiki, natijada oddiy integralga ega bo`linadi.

Bizga $\int f(x)dx$ berilgan bo`lsin. $x=\varphi(t)$ almashtirishni olaylik. Bundan $dx=\varphi'(t)dt$ ni topib, uni berilgan integralga qo`ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Bu esa berilgan integralga nisbatan ancha sodda bo`ladi. Umuman integral hisoblanganda turli almashtirishlar yordamida berilgan integral, jadvaldagi integrallardan birortasiga keltiriladi. So`ngra jadvaldan boshlang`ich funksiya aniqlanadi.

Ba`zan berilgan integralda $x=\varphi(t)$ o`rniga $t=\psi(x)$ almashtirish yaxshi natija beradi. Agar integral $\int\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx$ ko`rinishda berilgan bo`lsa, bunda $t=\psi(x)$ almashtirish bilan integral juda soddalashadi. Haqiqatdan,

$$t=\psi(x)\quad dt=\psi'(x)dx$$

$$\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\psi(x)|+C.$$

Bundan ko`rinadiki o`zgaruvchini almashtirish bilan integrallaganda, chiqqan natija yana avvalgi o`zgaruvchi yordamida ifodalanar ekan, ya`ni t o`zgaruvchidan x o`zgaruvchiga o`tilar ekan.

Misol. Quyidagi integral hisoblansin:

$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$ bunda 1+2cosx=t deb olamiz.

Bu holda -2 sinxdx=dt bo`ladi. Demak,

$$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt=-\frac{1}{2}2t^{1/2}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1+2\cos x}+C$$

Bo`laklab integrallash usuli

Bizga ikkita diferensiallanuvchi u(x) va v(x) funksiyalar berilgan bo`lsin. Bu funksiyalar ko`paytmasi (uv) ning differensialini topaylik. Bu differensial quyidagicha aniqlanadi[7]:

d(uv)=udv+vdu

Buni ikki tomonini hadma-had integrallab, quyidagini topamiz:

$$uv=\int udv+\int vdu$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Oxirgi topilgan ifoda bo`laklab integrallash formulasi deyiladi.

Bu formulani ko`llab integral hisoblaganda $\int udv$ ko`rinishdagi integral, ancha sodda bo`lgan $\int vdu$ ko`rinishdagi integralga keltiriladi.

Agar integral ostida u=lnx funksiya, yoki ikkita funksiyaning ko`paytmasi, hamda teskari trigonometrik funksiyalar qatnashgan bo`lsa, bunda bo`laklab integrallash formulasi qo`llaniladi. Bu usul bilan integrallaganda yangi o`zgaruvchiga o`tishning hojati yo`q.

[7] Jo‘raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 219.

Umuman aniqmas integralni hisoblaganda topilgan natija yoniga o`zgarmas (S=const) ni qo`shib qo`yish shart. Aks holda integralning bitta qiymati topilib, qolganlari tashlab yuborilgan bo`ladi. Bu esa integrallashda xatolikka yo`l qo`yilgan deb xisoblanadi[8].

Misol. $\int xarctgxdx$ ni hisoblang.

$$u = arctgx \quad dv = xdx \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = \int xdx = x^2/2$$

(bunda S=0 deb olindi) formulani qo`llaymiz.

$$\int xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx$$

$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ ni alohida hisoblaymiz

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int (1-\frac{1}{1+x^2})dx = x - arctgx + C$$

buni (*) ga qo`yamiz.

$$\int xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctgx + C = -\frac{1}{2} + \frac{x^2+1}{2}arctgx + C$$

Lemma: Agar y=Q(x) funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqning har bir nuqtasida uning hosilasi Q′(x)=0 bo`lsa, unda bu funksiya (a,b) oraliqda o`zgarmas, ya`ni Q(x)=C (C - const) bo`ladi.

Isbot: Qaralayotgan (a,b) oraliqdan ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 ($x_1 \neq x_2$) nuqtalarni olamiz. Unda y=Q(x) funksiya olingan $[x_1,x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli

$$Q(x_2) - Q(x_1) = Q'(\xi)(x_2 - x_1), x_1 < \xi < x_2,$$

tenglik o`rinli bo`ladi. Lemma sharti bo`yicha (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida Q′(x)=0 bo`lgani uchun ξ nuqtada ham $Q'(\xi)=0$ bo`ladi. Bu yerdan, oldingi tenglikka asosan, $Q(x_2)-Q(x_1)=0$, ya`ni $Q(x_2)=Q(x_1)$ tenglikka ega bo’lamiz. Bu esa Q(x)=C ekanligini ifodalaydi. Lemma isbot bo`ldi.

Endi quyidagi teoremani qaraymiz.

Teorema: Agar F(x) va Φ(x) berilgan f(x) funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang`ich funksiyalari bo`lsa, u holda biror C o`zgarmas sonda Φ(x)=F(x)+C tenglik o`rinli bo`ladi.

Isbot: Teorema shartiga asosan F(x) va Φ(x) berilgan f(x) funksiyaning boshlang`ich funksiyalari bo`lgani uchun F′(x)=f(x) ва Φ′(x)=f (x) tenglik o`rinlidir. Bu yerdan Q(x)=Φ(x)–F(x) funksiyaning hosilasi

$$Q'(x) = [\varphi(x) - F(x)]' = \varphi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ekanligini ko`ramiz. Unda, oldingi lemmaga asosan, Q(x)=C natijani olamiz. Demak, Q(x)=Φ(x)–F(x)=C va haqiqatan ham Φ(x)=F(x)+C tenglik o`rinli.

Bu teoremadan ushbu muhim xulosa kelib chiqadi: agar F(x) berilgan f(x) funksiyaning birorta boshlang`ich funksiyasi bo`sa, uning barcha boshlang`ich funksiyalari F(x)+C (C-ixtiyoriy o`zgarmas son) kabi aniqlanadi. Demak, f(x) funksiyaning barcha boshlang`ich funksiyalarini topish uchun uning birorta F(x) boshlang`ich funksiyasini topib, unga C o`zgarmas sonni qo`shib qo`yish kifoyadir. Masalan, f(x)=2x funksiyaning barcha boshlang`ich funksiyalari x^2+C ko`rinishda bo`ladi.

Ta`rif:** Agar F(x) biror (a,b) oraliqda f(x) funksiyaning boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, unda F(x)+C (C – ixtiyoriy o`zgarmas son) funksiyalar to`plami shu oraliqda f(x) funksiyaning **aniqmas integrali deyiladi .

[8] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 116.

Berilgan f(x) funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va, ta`rifga asosan, birorta F(x) boshlang`ich funksiya bo`yicha

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda C ixtiyoriy o`zgarmas son ekanligini yana bir marta eslatib o`tamiz.

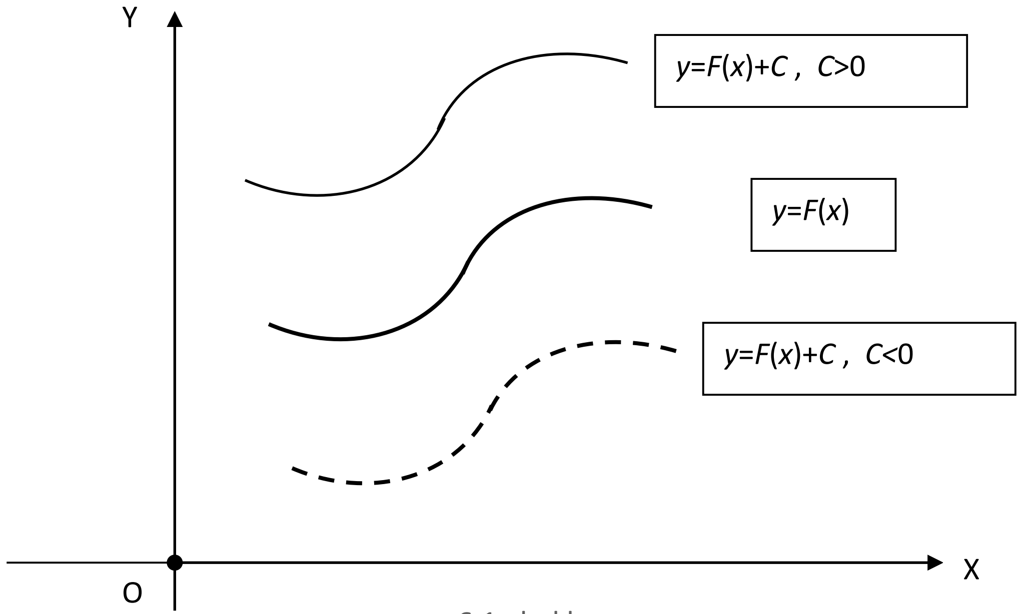
(1) tenglikda $\int$ - integral belgisi, f(x) **integral ostidagi funksiya**, f(x)dx **integral ostidagi ifoda**, x esa **integrallash o`zgaruvchisi** deyiladi. Berilgan f(x) funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmas integralini topish amali bu funksiyani **integrallash** deb ataladi.

Izoh: Berilgan f(x) uchun qaysi shartda F(x) boshlang`ich funksiya, demak $\int f(x)dx$ aniqmas integral, mavjud bo`lish masalasi kelgusida qaraladi.

Yuqorida topilgan boshlang`ich funksiyalar bo`yicha quyidagi aniqmas integrallarni yozish mumkin:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, \quad \int 2x dx = x^2 + C$$

Aniqmas integral ta`rifini ifodalovchi (1) tenglikdan ko`rinadiki, aniqmas integral y=F(x)+C(C-ixtiyoriy o`zgarmas son) funksiyalar sinfini ifodalaydi. Shu sababli, geometrik nuqtai-nazardan, aniqmas integral y=F(x) funksiya grafigini OY koordinata o`qi bo`ylab parallel ko`chirishdan hosil bo`ladigan chiziqlar sinfidan iborat bo`ladi (6.1-shakl).



6.1-shakl

Aniqmas integral xossalari

Aniqmas integral ta`rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya`ni

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \quad (2)$$

Isbot: Aniqmas integral va boshlang`ich funksiya ta`rifini ifodalovchi (2) va (1) tengliklarga asosan

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Aniqmas integral differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya`ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

Isbot: Differensial ta`rifi va oldingi xossaga asosan

$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

Izoh: Bu yerdan differentsiallash amali integrallash amaliga teskari amal ekanligini ko`ramiz.

Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy C o`zgarmasning yig`indisiga teng, ya`ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \cdot$$

Isbot: Agar F′(x)=f(x) deb belgilasak, unda F(x) hosil qilingan f(x) funksiya uchun boshlang`ich funksiya bo`ladi. Unda, aniqmas integral ta`rifiga asosan,

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Biror funksiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan o`zgarmas yig`indisiga teng, ya`ni

$$\int dF(x) = F(x) + C \cdot$$

Isbot: Differensial ta`rifi va oldingi xossaga asosan

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Izoh: Bu yerdan integrallash amali differentsiallash amaliga o`zgarmas son aniqligida teskari amal ekanligini ko`ramiz.

O`zgarmas k ko`paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya`ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Bu tenglik o`zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: I xossaga asosan ikkala aniqmas integral bir xil kf(x) hosilaga ega. Demak, bu aniqmas integrallarning ikkalasi ham kf(x) uchun boshlang`ich funksiya bo`ladi va shu sababli ular bir-biridan faqat o`zgarmas songa farq qilishi mumkin.

Masalan,

$$\int 10xdx = \int 5\cdot 2xdx = 5\int 2xdx = 5(x^2 + C) = 5x^2 + 5C = 5x^2 + C.$$

Bu yerda C ixtiyoriy o`zgarmas son bo`lgani uchun 5C ham ixtiyoriy o`zgarmas son bo`ladi va shu sababli uni yana C deb belgilash mumkin.

Ikkita funksiya algebraik yig`indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig`indisiga teng, ya`ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu yerda ham tenglik o`zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: Aniqmas integralning I xossasiga asosan

$$(\int [f(x) \pm g(x)]dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Algebraik yig`indining hosilasi va I xossaga asosan

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Demak, VI xossadagi tenglikning ikkala tomonidagi funksiyalar bir xil hosilaga ega va shu sababli ular o`zgarmas son aniqligida teng bo`ladi.

Masalan,

$$\int (5^x + 2x)dx = \int 5^x dx + \int 2xdx = \frac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C$$

Izoh: VI xossa chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig`indisi uchun ham o`rinli bo`ladi.

Ta`rif: V va VI xossalar aniqmas integralning **chiziqlilik xossalari** deyiladi[9].

Aniqmas integralning chiziqlilik xossalarini bitta

$$\int [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx \quad (3)$$

---

[9] Jo‘raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 220.

tenglik orqali ham ifodalash mumkin.

Agar a va b o`zgarmas sonlar bo`lsa, unda quyidagi tasdiq o`rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \ .$$

Isbot: Ikkinchi integral javobi to`g`riligini differensiallash orqali ko`rsatamiz. Shartga ko`ra F′(x)=f(x) bo`lgani uchun va murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)\cdot$$

Masalan,

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C \Rightarrow \int (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^5}{5} + C = \frac{(2x-3)^5}{10} + C\cdot$$

Integrallar jadvali. Hosilalar jadvali, oldin hisoblangan hosilalar va aniqmas integral ta`rifidan foydalanib, asosiy integrallar jadvalini yozamiz. Bunda aniqmas integral javobining to`g`riligini tenglikning o`ng tomonidan hosila olish orqali tekshirish mumkin. Natijada integral ostidagi funksiya hosil bo`lishi kerak. Masalan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

integral javobi to`g`riligini tekshiramiz. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})' =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}(x^2 \pm a^2)'] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}) =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}+x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,.$$

Differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo`ldi. Demak, integral javobi to`g`ri ko`rsatilgan.

Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar

Bir qator matematik, fizik, mexanik va iqtisodiy masalalarni yechish uchun aniq integral tushunchasi juda katta ahamiyatga ega. Bu tushunchani kiritishdan oldin unga olib keladigan ayrim masalalarni qaraymiz.

- **Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasi**[10]**.** Turli geometrik shakllarning yuzalarini topish masalasi matematikaning eng qadimgi masalalaridan biri bo`lib hisoblanadi. Qadimgi Vavilon va Misrda ko`pburchaklarning yuzalarini hisoblay olganlar. Buyuk yunon olimi Arximed parabola segmentining yuzasini hisoblashni bilgan.O`rta Osiyolik yurtdoshlarimiz Beruniy va Al-Xorazmiy doira va doiraviy sektor yuzalarini topa olganlar. Ammo bu geometrik shaklarning yuzalari o`ziga xos usullarda aniqlangan bo`lib, ixtiyoriy geometrik shaklning yuzasini hisoblashga imkon beradigan umumiy usul ma`lum emas edi. Differensial va integral hisob yaratilgach bu masala geometrik shakllarning nisbatan keng sinfi uchun o`z yechimini topdi.

Ta`rif:** Berilgan y=$f$(x) uzluksiz funksiya grafigi, x=a va x=b vertikal to`g`ri chiziqlar hamda OX o`qi bilan chegaralangan geometrik shakl **egri chiziqli trapetsiya deb ataladi[11].

Quyidagi 6.2-shaklda ko`rsatilgan aABb egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini topish masalasini qaraymiz.

---

[10] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 117.

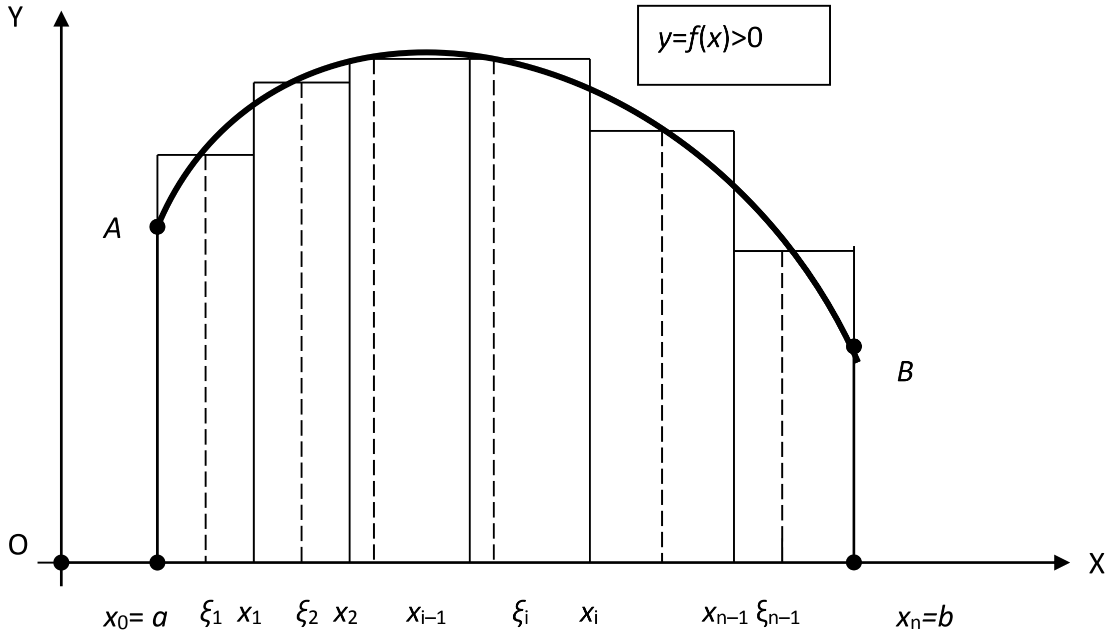
[11] Jo'raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 223.

Buning uchun dastlab aABb egri chiziqli trapetsiyaning asosini ifodalovchi [a,b] kesmani $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$ bo`lgan ixtiyoriy n–1 ta nuqta yordamida bo`laklarga ajratamiz. Bu nuqtalarga $a=x_0$ va $b=x_n$ nuqtalarni birlashtirsak, [a,b] kesma ular orqali

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, \; x_1], \ldots, \quad [x_{n-1}, \; x_n]$$

n ta kichik kesmachalarga bo`linadi.

So`ngra $x_i$ , i=1,2, …, n–1 bo`linish nuqtalaridan OY o`qiga parallel to`g`ri chiziqlar o`tqazib, berilgan aABb egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga (yuqoridagi 6.2-shakl) ajratamiz. Ravshanki aABb egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yig`indisiga teng bo`ladi.



6.2-shakl

Shu sababli, agar asosi $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1,2,3,…, n) bo`lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalarini $\Delta S_i$ kabi belgilansa, quyidagi tenglik o`rinli bo`ladi:

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_i + \cdots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \quad (4)$$

Bu yerda ΔS_i (i=1,2, ... , n) ham egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari bo`lgani uchun ularning aniq qiymatlarini topa olmaymiz. Bu yuzalarning taqribiy qiymatini aniqlash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1,2, ... , n) kesmalarning har biridan ixtiyoriy ravishda ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda AB egri chiziqni ifodalovchi y=f(x)>0 funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Endi har bir ΔS_i (i=1,2, ... , n) yuzalarni asoslari $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ va balandliklari $h_i = f(\xi_i) > 0$ bo`lgan to`g`ri to`rtburchaklarning yuzalari bilan almashtirib, quyidagi taqribiy tengliklarga ega bo`lamiz:

$$\Delta S_1 \approx f(\xi_1)\Delta x_1 , \Delta S_2 \approx f(\xi_2)\Delta x_2, \ldots, \Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i , \ldots, \Delta S_n \approx f(\xi_n)\Delta x_n .$$

Bu taqribiy tengliklarni (4) yig`indiga qo`yib, berilgan aABb egri chiziqli trapetsiyaning izlanayotgan S yuzasi uchun ushbu taqribiy tenglikka ega bo`lamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \; . (5)$$

taqribiy tenglikning geometrik ma`nosi shundan iboratki, biz hozircha hisoblay olmaydigan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi to`g`ri to`rtburchaklardan hosil qilingan pog`onasimon shakl yuzasi bilan almashtirildi. Bunda bo`laklar soni n qanchalik katta qilib olinsa, pog`onasimon shaklning yuzasi egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini shunchalik darajada aniqroq ifodalaydi. Bu mulohazadan izlanayotgan S yuzaning aniq qiymati

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (6)$$

limit bilan aniqlanishi mumkinligini ko`ramiz.

- **O`zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash masalasi**[12]**.** Yo`nalishi va kattaligi o`zgarmas bo`lgan kuch ta`sirida moddiy nuqta L to`g`ri chiziq bo`ylab harakat qilayotgan bo`lsin. Bunda kuch yo`nalishi bilan moddiy nuqtaning harakat yo`nalishi bir xil deb olamiz. Agar bu shartlarda kattaligi f bo`lgan kuch ta`sirida moddiy nuqta L to`g`ri chiziq bo`ylab a nuqtadan b nuqtaga ko`chirilsa, ya`ni b–a masofaga siljigan bo`lsa, unda bajarilgan ish A=f·(b–a) formula bilan aniqlanishi bizga maktab fizika kursidan ma`lum[13].

Endi yuqoridagi shartlardan kuch kattaligi o`zgarmas degan shartdan voz kechib, u harakatning har bir x nuqtasida biror uzluksiz f(x) funksiya bo`yicha o`zgarib boradigan umumiyroq holni qaraymiz. Bu holda kuch moddiy nuqtani [a,b] kesma bo`yicha harakatlantirganda bajarilgan A ishni hisoblash masalasi paydo bo`ladi. Bu masalani yechish uchun moddiy nuqtani bosib o`tgan yo`lini ifodalovchi [a,b] kesmani oldingi masaladagi singari n ta bo`laklarga ajratib, har bir $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1,2, ... , n) kichik kesmada o`zgaruvchi kuchning bajargan ishini ΔA_i deb belgilaymiz. Bu holda [a, b] kesmada bajarilgan umumiy A ish qiymatini

$$A=\Delta A_1+\Delta A_2+\dots+\Delta A_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \quad (7)$$

yig`indi ko`rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda ham ΔA_i ishning aniq qiymatini hisoblay olmaymiz. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning har biridan ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlab olamiz va unda kuchning $f(\xi_i)$ qiymatini hisoblaymiz. Uzunligi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ bo`lgan bu kichik kesmada kuch kattaligi o`zgarmas va $f(\xi_i)$ deb hisoblab, ushbu taqribiy tengliklarni yoza olamiz:

$$\Delta A_1\approx f(\xi_1)\cdot\Delta x_1,\ \Delta A_2\approx f(\xi_2)\cdot\Delta x_2,\ \dots,\ \Delta A_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,\ \dots,\ \Delta A_n\approx f(\xi_n)\cdot\Delta x_n\ .$$

Bularni (7) yig`indiga qo`yib, izlanayotgan A ishning taqribiy qiymatini topamiz:

$$A\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ . \quad (8)$$

Bu yerda ham $[x_{i-1}, x_i]$ bo`laklar soni n oshib borgan sari (8) taqribiy tenglik xatoligi tobora kamayib boradi deb kutish mumkin. Shu sababli A ishning aniq qiymati

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (9)$$

limit orqali ifodalanadi.

- **Mahsulot hajmini topish masalasi.** Agar ish kuni davomida mehnat unumdorligi o`zgarmas, ya`ni ixtiyoriy t vaqtda uning kattaligi f bo`lsa, unda $(T_1,T_2)$ vaqt oralig`ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $V=f\cdot(T_2-T_1)$ formula bilan hisoblanadi. Masalan, sozlangan avtomatik qurilma uchun bu holni o`rinli deb olish mumkin.

Ammo ishchining mehnat unumdorligi to`g`risida bunday deb bo`lmaydi. Masalan, ish kunining boshlang`ich davrida (ishga ko`nikish) uning mehnat unumdorligi ma`lum bir vaqtgacha o`sib boradi. So`ngra, ishga kirishib ketgandan keyin, ma`lum bir vaqt oralig`ida bir xil unumdorlik bilan mahsulot ishlab chiqaradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari, charchash tufayli, mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib mehnat unumdorligi o`zgaruvchan va t vaqtga bog`liq ravishda biror uzluksiz f(t) funksiya orqali aniqlangan bo`ladi. Bu holda $(T_1,T_2)$ vaqt oralig`ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi V uchun yuqoridagi formula o`rinli bo`lmasligi

---

[12] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 117.

[13] Jo‘raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 225.

ravshandir va uni topish masalasi paydo bo`ladi. Bu masala ham oldingi masalalardagi mulohazalar asosida quyidagicha yechiladi. ($T_1$,$T_2$) vaqt oralig`ini ixtiyoriy ravishda tanlangan

$T_1=t_0< t_1< t_2< \cdots t_i<\cdots t_{n-1}< t_n=T_2$

nuqtalar bilan n ta (t_{i-1}, t_i) (i=1,2,3, ⋯ , n) vaqt oraliqchalariga bo`laklaymiz. Bu vaqt oraliqchalarida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini $\Delta V_i$ (i=1,2,3, ⋯ , n) deb belgilasak, unda butun vaqt oralig`ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \quad (10)$$

yig`indi kabi ifodalanadi. Bu yig`indidagi qo`shiluvchilarning taqribiy qiymatlarini topish maqsadida ($t_{i-1}$, $t_i$) (i=1,2,3, ⋯ , n) vaqt oraliqchalaridan ixtiyoriy bir $\xi_i$ vaqtni tanlab olamiz va unda $f(\xi_i)$ mehnat unumdorligini aniqlaymiz. Kichkina ($t_{i-1}$, $t_i$) oraliqda uzluksiz f(t) funksiya o`z qiymatini unchalik ko`p o`zgartira olmaydi va shu sababli bu yerda mehnat unumdorligini o`zgarmas va uning qiymati $f(\xi_i)$ deb olishimiz mumkin. Shu sababli $\Delta t_i= t_i- t_{i-1}$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi uchun

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i\ , i=1,2,3, \cdots , n,$$

taqribiy tengliklarni yozish mumkin. Bu taqribiy tengliklarni (7) yig`indiga qo`yib,

$$V\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \quad (11)$$

taqribiy natijaga ega bo`lamiz. Bu holda mahsulot hajmining aniq qiymati

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \quad (12)$$

limit orqali topiladi.

Yuqoridagi geometrik, fizik va iqtisodiy mazmunli uchta turli masala bir xil matematik usulda o`z yechimini topib, (6), (9) va (12) ko`rinishdagi bir xil limit orqali ifodalandi. Shu sababli bu usul va limitni umumiy holda qarash ma`noga egadir.

Aniq integralning ta`rifi va mavjudlik sharti

Berilgan y=f(x) funksiya [a, b] kesmada aniqlangan bo`lsin. Bu kesmani ixtiyoriy

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots x_{n-1}<x_n=b$$

bo`linish nuqtalari yordamida n ta

$$[x_0,x_1],\quad [x_1,x_2],\ldots,[x_{i-1},\ x_1],\ldots,\quad [x_{n-1},\ x_n]$$

kichik kesmachalarga ajratamiz. Hosil bo`lgan har bir [x_{i-1}, x_i] (i=1, 2, 3, …, n) kichik kesmachalardan ixtiyoriy bir ξ_i nuqtani tanlaymiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda berilgan f (x) funksiyaning $f(\xi_i)$ (i=1, 2, 3, …, n) qiymatlarini va [x_{i-1}, x_i] kesmachalarning $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ (i=1, 2, 3, …, n) uzunliklarini hisoblaymiz. Bu qiymatlaridan foydalanib ushbu yig`indini tuzamiz:

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (13)$$

Ta`rif:** (13) tenglik bilan aniqlanadigan $S_n(f)$ yig`indi y=f(x) funksiya uchun [a,b] kesma bo`yicha **integral yig`indi deb ataladi[14].

$S_n(f)$ integral yig`indi ta`rifidan ko`rinadiki uning qiymati [$x_{i-1}$, $x_i$] kichik kesmachalar uzunligi $\Delta x_i$ , ularning soni n va tanlangan $\xi_i$ nuqtalarga bog`liq bo`ladi. $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ belgilash kiritamiz.

**Ta`rif:** Agar $S_n( f )$ integral yig`indilar ketma-ketligi $n\to\infty$ va $\Delta_n\to 0$ bo`lganda $x_i$ bo`linish nuqtalari hamda [x_{i-1}, x_i] kichik kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog`liq

[14] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 118.

bo`lmagan biror chekli S( f ) limitga ega bo`lsa , bu limit qiymati S(f) berilgan f(x) funksiyadan [a,b] kesma bo`yicha olingan **aniq integral** deyiladi.

Berilgan f(x) funksiyadan [a,b] kesma bo`yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va ta`rifga asosan quyidagicha aniqlanadi :

$$\int_a^b f(x)dx = S(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} S_n(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (14)$$

Bu yerda a – aniq integralning **quyi chegarasi**, b – **yuqori chegarasi**, [a, b] –integrallash kesmasi, x–integrallash o`zgaruvchisi, f(x) – **integral ostidagi funksiya**, f(x)dx – **integral ostidagi ifoda** deyiladi.

Ta`rif:** Agar f(x) funksiyadan [a,b] kesma bo`yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo`lsa, unda f(x) bu kesmada **integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Izoh: Aniq integralning yuqorida keltirilgan ta`rifi olmoniyalik buyuk matematik Riman (1826–1866 y.) tomonidan taklif etilgan va shu sababli Riman integrali deb yuritiladi. Bundan tashqari aniq integralning Koshi, mashhur farang matematigi Lebeg (1875–1941 y.) va niderlandiyalik matematik Stilt`yes (1856–1894 y.) tomonlaridan kiritilgan ta`riflari ham mavjud va keng qo`llaniladi.

Oldin ko`rilgan masalalarga qaytsak, (6) va (14) tengliklarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

(9) va (14) tengliklarga asosan o`zgaruvchi kuch bajargan ish

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

(12) va (14) tengliklarga asosan ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V = \int_a^b f(t)dt$$

aniq integrallar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Bu tengliklarni aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma`nolari deb olishimiz mumkin.

Aniq integral ta`rifidan ko`rinadiki, berilgan f(x) funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi bo`lishi uchun ancha og`ir shartlarni qanoatlantirishi kerak. Haqiqatan ham, qaralayotgan [a,b] kesmani bo`linish nuqtalari $x_i$ (i=1,2, ⋯, n) va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalardan tanlanadigan $\xi_i$ nuqtalar qanday bo`lmasin aniq integralni ifodalovchi (11) limit qiymati S(f) bir xil bo`lishi kerak. Bu esa har qanday funksiya uchun bajarilavermaydi. Masalan, [0,1] kesmada aniqlangan D(x) Dirixle funksiyasi uchun integral yig`indini qaraymiz. Agar $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalar ratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=1$ va integral yig`indi

$$S_n(D) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 1-0=1\ ;$$

agar ξ_i nuqtalar irratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=0$ va integral yig`indi

$$S_n(D) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0$$

bo`ladi. Bu yerdan ko`rinadiki, n→∞ bo`lganda $S_n(f)$ integral yig`indi limitining qiymati ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog`liq. Bundan esa D(x) funksiya [0,1] kesmada integrallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

Shu sababli (14) limitni, ya`ni $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaysi shartda mavjud bo`lishini aniqlashimiz kerak. Bu savolga javob isbotsiz beriladigan ushbu teoremalarda keltiriladi.

Teorema: Berilgan [a,b] kesmada chegaralangan va unda chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo`lgan f(x) funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo`ladi.

Natija: Berilgan [a,b] kesmada uzluksiz bo`lgan f(x) funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo`ladi.

Haqiqatan ham, Veyershtrass teoremasiga asosan [a,b] kesmada uzluksiz f(x) funksiya shu kesmada chegaralangan bo`lib, oldingi teorema shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli bu kesmada integrallanuvchidir.

Bu tasdiqlardan funksiyalarning nisbatan keng sinfi uchun ularning aniq integrallari mavjud ekanligini ko`ramiz. Aniq integrallarning qiymatini topish (integralni hisoblash) masalasini kelgusiga qoldirib, bu masalani yechish uchun kerak bo`ladigan aniq integralning xossalari bilan tanishamiz.

Aniq integralning xossalari. Avvalo yuqorida ko`rib o`tilgan aniq integral ta`rifiga ikkita qo`shimcha kiritamiz.

❖ Aqar aniq integralda quyi a va yuqori b chegaralar (a<b) o`rni almashsa, unda

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (15)$$

tenglik o`rinli deb qabul etamiz. Bunday qarorni quyidagicha tushuntirish mumkin. (15) tenglikning chap tomonidagi integralda x integrallash o`zgaruvchisi OX o`qda x=a nuqtadan x=b nuqtaga qarab o`sadi va shu sababli $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$ bo`ladi. O`ng tomondagi integralda esa aksincha bo`lib, x integrallash o`zgaruvchisi x=b nuqtadan x=a nuqtaga qarab kamayib boradi va unda $\delta x_i= x_{i-1}-x_i= -\Delta x_i<0$ bo`ladi. Demak, (15) tenglikdagi integrallar uchun ularning integral yig`indilari faqat ishoralari bilan farq qiladi. Bu yerdan, limit xossasiga asosan, (15) tenglikni qabul etish mumkinligini ko`ramiz.

❖ (15) tenglikdan

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (16)$$

deb qabul qilishimiz mumkinligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham bu holda

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0 \cdot$$

Izoh: Aniq integral ta`rifini ifodalovchi (11) tenglikdan ko`rinadiki, uning qiymati biror sondan iborat bo`ladi. Bu son faqat integral ostidagi f(x) funksiya va [a,b] integrallash kesmasiga bog`liq bo`lib, integrallash o`zgaruvchisiga bog`liq emas. Shu sababli aniq integralda integrallash o`zgaruvchisini har xil belgilash mumkin, ya`ni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \cdots \ .$$

I xossa[15]**:** Aniq integralda o`zgarmas ko`paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya`ni k o`zgarmas son bo`lsa, unda

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (17)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Isbot: Aniq integral ta`rifi va limit xossasiga asosan

[15] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 118.

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx \cdot$$

II xossa: Ikki yoki undan ortiq funksiyalar algebraik yig`indisining aniq integrali qo`shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig`indisiga teng bo`ladi, ya`ni

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_m(x)dx \quad (18)$$

tenglik o`rinli bo`ladi. Bunda tenglikning o`ng tomonidagi aniq integrallar mavjud deb hisoblanadi.

Isbot: Aniq integral ta`rifi va limit xossasiga asosan

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i) \pm \cdots \pm f_m(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \pm \cdots \pm \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_m(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_m(x)dx \cdot$$

III xossa: Agar [a, b] kesmada $f(x)\geq 0$ va integrallanuvchi bo`lsa, unda uning aniq integrali uchun

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (19)$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi.

Isbot: Bu holda integral yig`indida $f(\xi_i)\geq 0$, $\Delta x_i>0$ ($i=1,2,3,\cdots, n$) bo`lgani uchun va aniq integral ta`rifi hamda limit xossasiga asosan

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(f) \geq 0,$$

ya`ni (19) tengsizlik o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

IV xossa[16]: Agar [a, b] kesmada f(x) va g(x) funksiyalar integrallanuvchi hamda $f(x)\leq g(x)$ bo`lsa, unda ularning aniq integrallari uchun

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (20)$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi.

Isbot: II xossaga asosan $h(x)=g(x)-f(x)$ funksiya berilgan [a,b] kesmada integrallanuvchi bo`ladi. Bundan tashqari $f(x)\leq g(x)$ shartdan $h(x)\geq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Unda, IV va II xossalardan foydalanib, (20) tengsizlikka quyidagicha erishamiz:

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \cdot$$

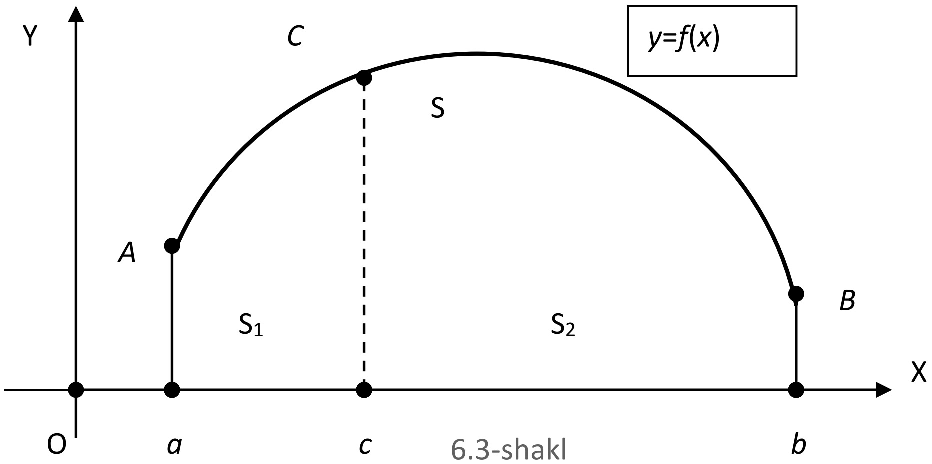
V xossa: Agar a<c<b va f(x) funksiya [a,c], [c,b] kesmalarda integrallanuvchi bo`lsa, unda u [a,b] kesmada ham integrallanuvchi va

[16] Jo‘raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 225.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (21)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Isbot: Bu xossani qat`iy matematik isbotini keltirmasdan, uni integralning geometrik mazmuniga asoslangan (6.3-shakl) talqinini keltirish bilan chegaralanamiz.



6.3-shakl

(21) tenglikning o`ng tomonidagi birinchi integral y=f(x) funksiya grafigi orqali hosil qilingan aACc egri chiziqli trapetsiyaning S_1 yuzasini, ikkinchi integral cCBb egri chiziqli trapetsiyaning S_2 yuzasini ifodalaydi. (21) tenglikning chap tomondagi integral esa y=f(x) funksiya grafigi orqali hosil qilingan aABb egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini ifodalaydi. Bu yerda $S=S_1+S_2$ tenglik o`rinli va uni integrallar orqali ifodalab, (21) tenglikni hosil etamiz.

Izoh: III xossani ifodalovchi (21) tenglik c<a va c>b holda ham o`rinli bo`ladi. Masalan, c>b holda a<b<c bo`lgani uchun (21) tenglik yuqoridagi mulohazalar va (15) tenglikka asosan quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \cdot$$

VI xossa: Har qanday [a,b] kesmada o`zgarmas f(x)=1 funksiya integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b-a \quad (22)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Isbot: Bu holda integral yig`indida $f(\xi_i)=1$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,3,\cdots, n)$, $x_0=a$ va $x_n=b$ bo`lgani uchun

$$S_n(1) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^n \Delta_i = (x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1}) = x_n - x_0 = b-a\,.$$

Bu yerdan integral ta`rifi va limit xossasidan (22) tenglik kelib chiqadi:

$$\int_a^b dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(1) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} (b-a) = b-a \cdot$$

Izoh: Integralning geometrik ma`nosiga ko`ra (22) tenglikdagi aniq integral asosi [a,b] kesmadan iborat va balandligi f(x)=1 bo`lgan to`g`ri to`rtburchak yuzasini ifodalaydi va bu yuza S=1·(b–a)= b–a ekanligidan ham (22) tenglikka ishonch hosil etish mumkin.

VII xossa: Agar [a,b] kesmada (a<b) integrallanuvchi y=f(x) funksiyaning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo`lsa, unda aniq integral uchun

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad (23)$$

qo`sh tengsizlik o`rinli bo`ladi.

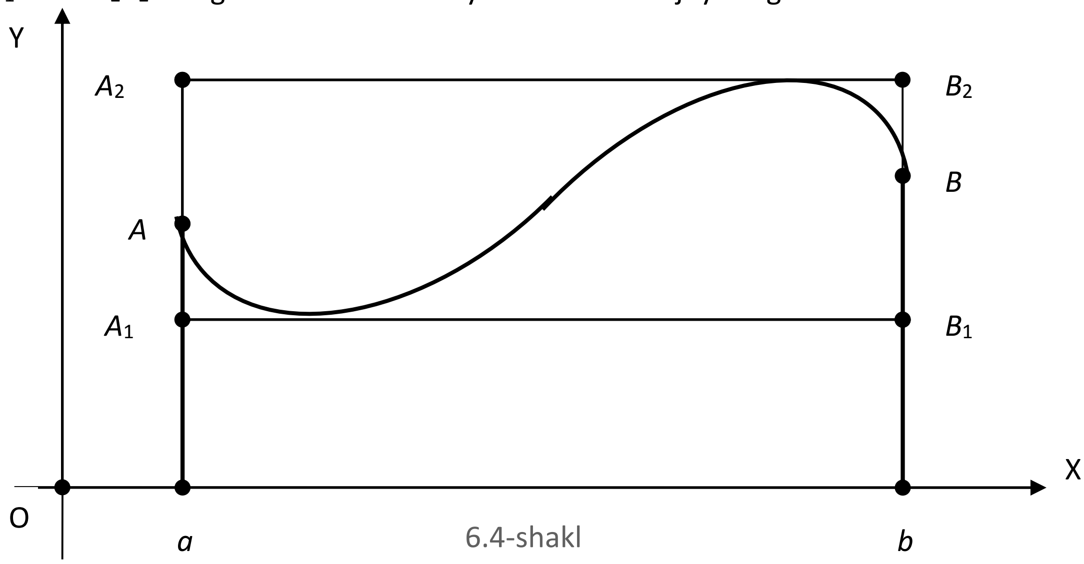
Isbot: Shartga asosan [a,b] kesmada m≤f(x)≤M bo`lgani uchun IV xossa va (22) tenglikdan hamda I xossadan foydalanib, quyidagilarni olamiz:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx \Rightarrow m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \cdot$$

Bu xossaning geometrik ma`nosi shundan iboratki (6.4-shakl), [a,b] kesmada y=f(x) funksiya grafigi orqali hosil qilingan aABb egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi asoslari b–a, balandliklari esa mos ravishda m va M bo`lgan

aA_1B_1b va aA_2B_2b to`g`ri to`rtburchaklar yuzalari orasida joylashgan bo`ladi .



6.4-shakl

VIII xossa[17]: Agar |f(x)| funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi bo`lsa, unda f(x) funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi va quyidagi tengsizlik o`rinli bo`ladi:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad (24)$$

Isbot: |f(x)|≤ f(x)≤|f(x)| qo`sh tengsizlikni hadlab integrallab, bu tasdiqqa quyidagicha erishamiz:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \ \cdot$$

**IX xossa (O`rta qiymat haqidagi teorema)[18]:** Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo`lsa, bu kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (25)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

[17] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011. – P. 119.
[18] Jo‘raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995. – B. 226.

Isbot: Berilgan f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo`lgani uchun, Veyershtrass teoremasiga asosan, u bu kesmada o`zining eng kichik m va eng katta M qiymatlarini qabul etadi. Shu sababli bu funksiya uchun VII xossani ifodalovchi (23) qo`sh tengsizlik o`rinli va uni quyidagicha yozish mumkin:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \cdot$$

Bu qo`sh tengsizlik orasida turgan sonni μ deb belgilasak, unda kesmada uzluksiz funksiya xossasiga asosan, [a,b] kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda f(ξ)=μ bo`ladi. Bu yerdan, belgilashimizga asosan,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ta`rif: (22) tenglik orqali aniqlanadigan

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

soni f(x) funksiyaning [a,b] kesmadagi **o`rta qiymati** deb ataladi.

Mustaqil bajarish uchun berilgan topshiriqlarni hisoblash usuli

Misol. $\int \frac{3x^2 - 5x\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}dx$ integralni toping.

Yechish. Suratni hadma-had maxrajga bo`lib, integral ostidagi funksiyani qo`shiluvchilarga ajratamiz va integralni topamiz.

$$\int \frac{3x^2 - 5x\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(3x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{7}{6}} + 2x^{\frac{-1}{3}}\right)dx = \int 3x^{\frac{5}{3}}dx - \int 5x^{\frac{7}{6}}dx + \int 2x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= 3\int x^{\frac{5}{3}}dx - 5\int x^{\frac{7}{6}}dx + 2\int x^{-\frac{1}{3}}dx = 3\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 5\frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1} + 2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{30}{13}x^{\frac{13}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + c$$

Aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \frac{3x^2 - 5x\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{9}{8}\sqrt[3]{x^8} - \frac{30}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + 3\sqrt[3]{x^2} + c$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \sqrt[3]{(1+x)^2}dx.$ integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun aniqmas integralni hisoblashning "O`zgaruvchilarni almashtirish yoki o`rniga qo`yish" usulidan foydalanamiz.

$\int \sqrt[3]{(1+x)^2}dx.$ bunda $1 + x = t$ deb olamiz. Bu holda $dx = dt$ bo`ladi.

Demak,

$$\int \sqrt[3]{(1+x)^2}dx = \int \sqrt[3]{t^2}dt = \int t^{\frac{2}{3}}dt = \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C$$

Aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \sqrt[3]{(1+x)^2}dx = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{t^5} + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \frac{dx}{2+3x}$. integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz.

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C$$

Formulaga asosan integral quyidagichi hisoblanadi.

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

Demak, aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \cos(5x-8)dx$ integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz.

$$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + C$$

Formulaga asosan integral quyidagichi hisoblanadi.

$$\int \cos(5x-8)dx = \frac{1}{5}\sin(5x-8) + C$$

Demak aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \cos(5x-8)dx = \frac{1}{5}\sin(5x-8) + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \frac{3xdx}{9x^2+2}$. integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun aniqmas integralni hisoblashning “O`zgaruvchilarni almashtirish yoki o`rniga qo`yish” usulidan foydalanamiz.

$\int \frac{3xdx}{9x^2+2}$. bunda $9x^2+2=t$ deb olamiz. Bu holda $18xdx = dt$ $3xdx = \frac{1}{6}dt$ bo`ladi. Demak,

$$\int \frac{3xdx}{9x^2+2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\ln t + C = \frac{1}{6}\ln|9x^2+2| + C$$

Aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \frac{3xdx}{9x^2+2} = \frac{1}{6}\ln|9x^2+2| + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$. integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Formulaga asosan integral quyidagichi hisoblanadi.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{5x^2-1}\right| + C$$

Demak, aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{5x^2-1}\right| + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int e^{5-2x}dx$ integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz.

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}e^{kx+b}$$

Formulaga asosan integral quyidagichi hisoblanadi.

$$\int e^{5-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{5-2x} + C$$

Demak aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int e^{5-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{5-2x} + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun aniqmas integralni hisoblashning “O`zgaruvchilarni almashtirish yoki o`rniga qo`yish” usulidan foydalanamiz.

$\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ bunda $\ln(x+1)=t$ deb olamiz. Bu holda $\frac{1}{x+1}dx = dt$ bo`ladi. Demak,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln(x+1)} + C$$

Aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{\ln(x+1)} + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \frac{\sqrt[5]{ctg\,3x}}{\sin^2 3x}dx.$ integralni toping.

Yechish. Bu integralni hisoblash uchun aniqmas integralni hisoblashning “O`zgaruvchilarni almashtirish yoki o`rniga qo`yish” usulidan foydalanamiz.

$\int \frac{\sqrt[5]{ctg\,3x}}{\sin^2 3x}dx.$ bunda $ctg\,3x = t$ deb olamiz. Bu holda $-\frac{3}{\sin^2 3x}dx = dt$ bo`ladi. Demak,

$$\int \frac{\sqrt[5]{ctg\,3x}}{\sin^2 3x}dx = -\frac{1}{3}\int \sqrt[5]{t}dt = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}dt = -\frac{5}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = -\frac{5}{18}\cdot\sqrt[5]{ctg^6 3x} + C$$

Aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \frac{\sqrt[5]{ctg\,3x}}{\sin^2 3x}dx = -\frac{5}{18}\cdot\sqrt[5]{ctg^6 3x} + C$$

ga teng bo`ladi.

Misol. $\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx.$ integralni toping.

Bu integralni hisoblash uchun aniqmas integralni hisoblashning “O`zgaruvchilarni almashtirish yoki o`rniga qo`yish” usulidan foydalanamiz.

$\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx.$ bunda $arctg\,3x = t$ deb olamiz. Bu holda $\frac{3}{1+9x^2}dx = dt$ bo`ladi. Demak,

$$\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx = \frac{1}{3}\int t^3 dt = \frac{1}{12}t^4 + C = \frac{1}{12}arctg^4 3x + C$$

Aniqmas integralning umumiy yechimi

$$\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx = \frac{1}{12}arctg^4 3x + C$$

ga teng bo`ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar

1.1. $\int \frac{4x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}}dx$

1.2. $\int \frac{\sqrt[6]{x} - 2x^2 + 5}{x^2}dx$

1.3. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 4x^2 - 5}{2x^2}dx$

1.4. $\int \frac{\sqrt[7]{x^6} - 2x^2 + 3}{x}dx$

1.5. $\int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^3} + \frac{4}{x}\right)dx$

1.6. $\int \frac{\sqrt{x^3} - 3x^2 + 2}{x}dx$

1.7. $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}}dx$

1.8. $\int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x}dx$

1.9. $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2}dx$

1.10. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2}dx$

1.11. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^2 + 3}{x}dx$

1.12. $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1\right)dx$

1.13. $\int \left(x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3\right)dx$

1.14. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x}dx$

1.15. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4\right)dx$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. Rice University, Houston, Texas. 2011.
2. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to`plami. 1-qism, 2014.
3. Jo`raev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent, 1995.

Qo`shimcha adabiyotlar

1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. Toshkent, 1993.
2. Луре Л.И. Основы высшей математики. Москва, 2003.
3. Курганов К.А. Варианты домашних и контролных работ по высшей математике, УзМУ, 2005.

Internet saytlari

1. http://library.ziyonet.uz/uz
2. http://library.uz-djti.uz/

TO`PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

TO`PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga to`plamlar va ular ustida amallar bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

To`plam tushunchasi matematikaning boshlang`ich va muhim tushunchalardan biridir. Masalan: Natural sonlar to`plami, auditoriyadagi talabalar to`plami, bibleotekadagi kitoblar to`plami, bir nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziqlar to`plami biror xildagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar to`plami va boshqalar.

To`plamni tashkil etgan narsalar to`plamning elementlari deyiladi. Matematikada to`plamlar bosh harflar bilan, masalan: $A, B, X, Y, ...$ uning elementlari esa kichik harflar, masalan: $a, b, x, y, ...$ bilan belgilanadi.

To`plam chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo`lsa, unga chekli to`plam deb ataladi. Masalan, bibleotekadagi kitoblar soni yoki guruhdagi talabalar soni chekli bo`ladi. Cheksiz elementlardan tashkil topgan to`plam cheksiz to`plam deb ataladi. Masalan, natural sonlar to`plami, bitta nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziqlar to`plami va boshqalar.

x element X to`plamga tegishli bo`lsa, $x \in X$ deb belgilanadi, aks holda $x \notin X$ yoziladi. $\{x \in X / P(x)\}$ belgi P xossaga ega bo`lgan $x \in X$ lar to`plamini bildiradi. Bo`sh to`plamni $\varnothing = \{x \in \varnothing / x \neq x\}$ deb yozish mumkin.

Misol. Quyidagi xossalarga ega bo`lgan to`plamlar elementlarini aniqlang.

1) $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$; 2) $B = \{x \in N \mid x \leq 0\}$; 3) $C = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$

Yechish: 1) To`plam 5 dan kichik va teng bo`lgan natural sonlardan iboratligini bildiradi, ya`ni $A = \{1,2,3,4,5\}$. Manfiy natural son yo`q shuning uchun $B = \varnothing$;

bu holda $|x| \leq 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi faqat butun sonlar olinadi, bu $[-2; 2]$ kesmada bo`ladi. Shunday qilib, $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Misol. $A = \{1, 2\}$ to`plamning hamma qism to`plamlaridan iborat bo`lgan $B$ to`plamni tuzing.

Yechish: Qism to`plam ta`rifiga asosan, $\varnothing \in A$, $\{1\} \in A$, $\{2\} \in A$, $\{1, 2\} \in A$, Demak, $B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Misol. $A = (4, 8)$ va $B = (1, 4]$ bo`lsa, ularning birlashmasini va kesishmasini toping.

Yechish: Birlashmaning ta`rifidan $A \cup B = (1,8)$ bo`lib kesishmaning ta`rifidan $A \cap B = \varnothing$ bo`ladi.

Misol. $A = (-3, 7]$ va $B[5, 6]$ bo`lsa, ularning birlashmasi va kesishmasini toping.

Yechish: Ta`rifga asosan $A \cup B = (-3, 7]$, $A \cap B = [5,6]$ bo`ladi.

Misol. Ushbu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{1,3\}$

to`plamlarni qaraylik. Bu to`plamlar uchun

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\},$$

$$A \cap B = \{2,4,6\},$$

$$A \setminus B = \{1,3,5\},$$

$$B \setminus A = \{8\},$$

$$A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\},$$

$$A \cap C = \{1,3\},$$

$$B \cap C = \varnothing,$$

$$B \times C = \{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(6,3)(8,1),(8,3)\}.$$

bo`ladi.

Yuqorida keltirilgan ta`riflardan

$$E \cup E = E, \; E \cap E = E, \; E \setminus E = \varnothing,$$

shuningdek $E \subset F$ bo`lganda

$$E \cup F = F, \; E \cap F = E$$

bo`lishi kelib chiqadi.

Barcha 1, 2, 3, …., n, … - natural sonlardan iborat to`plam natural sonlar to`plami deyiladi va u N harfi bilan belgilanadi:

$$N = \{1, \; 2, \; 3, ..., \; n, ...\}.$$

Barcha …, -2, -1, 0, 1, 2, … - butun sonlardan iborat to`plam butun sonlar to`plami deyiladi va u Z harfi bilan belgilanadi:

$$Z = \{..., -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, ...\}$$

Ravshanki, $N \subset Z$ bo`ladi.

Tartiblangan to`plamlar

Agar biror E to`plamning elementlari uchun quyidagi tasdiqlar:

1) $n = m, \; n > m, \; n < m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o`rinli;

2) $n < m, \; m < p$ tengsizliklardan $n < p$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, E to`plam tartiblangan to`plam deyiladi.

Tartiblangan to`plamlarga dastlabki misol, $N = \{1, \; 2, \; 3, ..., \; n, ...\}$ natural sonlar to`plami bo`ladi. Bundan tashqari butun, ratsional, haqiqiy sonlar to`plamlari ham tartiblangan to`plamlarga misol bo`laoladi.

To`plamlarning ekvivalentligi

Ixtiyoriy ikkita E va F to`plamlar berilgan holda, tabiiyki, ularning qaysi birining elementi «ko`p» degan savol tug`iladi. Natijada to`plamlarni solishtirish (elementlar soni jihatidan solishtirish) masalasi yuzaga keladi. Odatda bu masala ikki usul bilan hal qilinadi: to`plamlarning elementlarini bevosita sanash bilan ularning elementlari soni solishtiriladi; biror qoidaga ko`ra bir to`plamning elementlariga ikkinchi to`plamning elementlarini mos qo`yish yo`li bilan ularning elementlari solishtiriladi.

Masalan, $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, \; 4, \; 9, \; 16\}$ to`plamlarning elementlari sonini solishtirib, $F$ to`plamning elementlari soni E to`plamning elementlari sonidan ko`p ekanligini aniqlaymiz. Yoki, E to`plamning har bir elementiga $F$ to`plamning bitta elementini

$$1 \to 1, \; 2 \to 4, \; 3 \to 9$$

tarzda mos qo`yib, $F$ to`plamda E to`plam elementiga mos qo`yilmay qolgan element borligini (u 16) hisobga olib, yana F ning elementlari soni E ning elementlari sonidan ko`p degan xulosaga kelamiz. Agar to`plamlar cheksiz bo`lsa, ravshanki, ularni 1- usul bilan solishtirib bo`lmaydi. Bunday vaziyatda faqat 2 - usul bilangina ish ko`riladi. Masalan, $N = \{1, \; 2, ..., \; n, ...\}$ natural sonlar to`plamining har bir n elementiga $(n = 1, \; 2, ...)$ juft sonlar to`plami $N_1 = \{2, \; 4, ..., \; 2n, ...\}$ ning $2n$ elementini $(n = 1, \; 2, ...)$ mos qo`yish bilan $(n \to 2n)$ solishtirib, ularning elementlari soni «teng» degan xulosaga kelamiz.

Misol. Ushbu

$$E = \{1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5\}, \qquad F = \left\{1, \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{5}\right\}$$

to`plamlar ekvivalent to`plamlar bo`ladi. Bu to`plam elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik mavjud. Uni quyidagicha

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 2 \leftrightarrow \frac{1}{2}, \ 3 \leftrightarrow \frac{1}{3}, \ 4 \leftrightarrow \frac{1}{4}, \ 5 \leftrightarrow \frac{1}{5},$$

o`rnatish mumkin. Demak, $E \sim F$.

Misol. Ushbu

$$E = \{2, 4, 6, 8\}, \ F = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

to`plamlar ekvivalent to`plamlar bo`lmaydi. Chunki bu to`plam elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatib bo`lmaydi.

Misol. Ushbu

$$E = N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, n \ldots\}, \ F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{n} \ldots\right\},$$

to`plamlar ekvivalent to`plamlar bo`ladi. Bu to`plam elementlari orasidagi o`zaro bir qiymatli moslik har bir $n$ ga $(n \in N) \frac{1}{n}$ ni $(\frac{1}{n} \in F)$ mos qo`yish bilan o`rnatiladi. Demak, $E \sim F$.

Misol. Ushbu

$$E = N = \{1,2,3,\ldots n,,,,\}, \ N_1 = \{2,4,6,\ldots,2n,\ldots\}$$

to`plamlar o`zaro ekvivalent bo`ladi. Bu to`plam elementlari orasida o`zaro bir qiymatili moslikni quyidagicha o`rnatish mumkin: har bir natural n $(n \in N)$ songa $2n$ son $(2n \in N_1)$ mos qo`yiladi $n \leftrightarrow 2n$). Demak, $E = N \sim N_1$.

Ravshanki, $N_1 \subset N$. Bu esa to`plamning qismi o`ziga ekvivalent bo`lishi mumkin ekanligini ko`rsatadi. Bunday holat faqat cheksiz to`plamlargina xosdir.

Yuqorida keltirilgan ta`rif va misollardan ikki chekli to`plamning o`zaro ekvivalent bo`lishi uchun ularning elementlari soni bir-biriga teng bo`lishi zarur va yetarli ekanligini ko`ramiz.

Ekvivalentlik munosabati quyidagi xossalariga ega:

1) $E \sim E$ (refleksivlik xossasi) ;
2) $E \sim F$ bo`lsa, $F \sim E$ bo`ladi(simmetrik xossasi) ;
3) $E \sim F$, $F \sim G$ bo`ladi (tranzitivlik xossasi).

To`plamlarning ekvivalentlik tushunchasi to`plamlarni sinflarga ajratish imkonini beradi. Masalan,

$$N_1 = \{2,4,6,\ldots,2n,\ldots\},$$
$$N_2 = \{1,3,5,\ldots 2n-1,\ldots\},$$
$$N_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

to`plamlar sanoqli to`plamlardir, chunki

$$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1,2,3,\ldots),$$
$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1,2,3,\ldots),$$
$$N_3 \sim N \quad (\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1,2,3,\ldots).$$

Misol. A={juft sonlar}={2,4,6,8,10,12…}

B={3ga bo`linadigan sonlar}={3,6,9,12…}

$A \cap B$={6,12,18,…}={6 ga bo`linadigan sonlar}

A={talabalar}, V= {futbolchilar}, $A \cap V$={futbol bilan shug`ullanuvchi talabalar}

Arifmetikada sonlarni ko`paytirish uchun kommutativlik va assotsiativlik qonunlari o`rinli. To`plamlar ko`paytmasi ta`rifidan bu qonunlar bu yerda xam saqlanib qolishini ko`rish mumkin, ya`ni $A \cap V = V \cap A, (A \cap V) \cap S = A \cap (V \cap S)$

Arifmetikada qo`shish va ko`paytirish amallari o`zaro distributivlik qonuni bilan bog`langan.

(a+v)s=as+vs.

Bu qonun to`plamlar uchun xam o`rinlidir.

$$(A\cup V)\cap S=(A\cap S)\cup(V\cap S).$$

Shu tenglikni isbotlaymiz: Bu munosabatni isbotlash uchun

$x\in A\cup V$ va $x\in S$. $x\in A\cup V\Rightarrow x\in A$ yeki $x\in V$ yeki $x\in(A\cap V)$ $x\in A$ bo`lsin$\Rightarrow x\in A\cap S\Rightarrow$

$$x\in(A\cap V)\cup(V\cap S).$$

$$x\in V\Rightarrow x\in V\cap S\Rightarrow x\in(A\cap S)\cup(V\cap S).$$

$$x\in A \text{ va } x\in V\Rightarrow x\in A\cap S,\ x\in V\cap S\Rightarrow x\in(A\cap S)\cup(V\cap S).$$

Shunday qilib, $\Rightarrow x\in(A\cup V)\cap S\Rightarrow x\in(A\cap S)\cup(V\cap S)$.

Ya`ni $(A\cup V)\cap S\subset(A\cap S)\cup(V\cap S)$.

Endi $u\in(A\cap S)\cup(V\cap S)$ bo`lsin. Unda $u\in(A\cap S)$ yoki $u\in(V\cap S)$ yoki $u\in(A\cap S)$ va $u\in(V\cap S)$.

$u\in(A\cap S)$ bo`lsin. Bu xolda $u\in A$, $u\in S\Rightarrow u\in(A\cup V)$, $u\in S$

$$\Rightarrow u\in(A\cup V)\cap S.$$

$$u\in A\cap S,\ u\in V\cap S\Rightarrow u\in A,\ u\in V, u\in S\Rightarrow u\in(A\cup V),\ u\in S$$

$$\Rightarrow u\in(A\cup V)\cap S.$$

Demak, $(A\cap S)\cup(V\cap S)\subset\in(A\cup V)\cap S$.

Demak, $(A\cup V)\cap S=(A\cap S)\cup(V\cap S)$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib yana bir distributivlik qonunini isbotlash mumkin.

$$(A\cap V)\cup S=(A\cup S)\cap(V\cup S)\ (*)$$

Misol. 1. Korxonada 10 erkak va 8 ayol ishlasa bir erkak va bir ayol xodimdan iborat juftlikni $n(\alpha \text{ va } \beta)=10\otimes 8=80$ usulda tanlash mumkin.

2. 10 talabadan iborat guruxga ikkita yo`llanma berildi. Bu yo`llanmalarni necha xil usulda tarqatish mumkin? α - I yo`llanma, $\beta$ - II yo`llanma $n(\alpha)=10$, $n(\beta)=9$, chunki bitta talabaga I-chi yo`llanma berildi. Demak,

$$n(\alpha \text{ va } \beta)=10\otimes 9=90$$

Umumiy xolda $\alpha_1, \alpha_2 \ldots.\alpha_m$ tanlovlarni mos ravishda $n(\alpha_1)$, $n(\alpha_2)\ldots.n(\alpha_m)$ usullarda amalga oshirish mumkin bo`lsa,

$$n(\alpha_1 \text{ yoki } \alpha_2 \text{ yoki}\ldots.\text{yoki } \alpha_m)=n(\alpha_1)+n(\alpha_2)+\ldots.+n(\alpha_m)$$

$$n(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va}\ldots.\text{va } \alpha_m)=n(\alpha_1)\otimes n(\alpha_2)\otimes,\ldots.,\otimes n(\alpha_m)$$

formulalar o`rinli bo`ladi.

Misol. 1) Z={butun sonlar}, V={juft sonlar}, Z \ V={toq sonlar}.

2) A={barcha talabalar}, V={I kurs talabalar}, A\V={II – V kurs talabalar}.

3) A={1,2,3,4,5}, V={1,3,7,9}, A\V={2,4,5}, V\A={7,9}.

Mavzuga doir misol va masalalar

1. N natural sonlar to`plami va $Z$ butun sonlar to`plami birlashmasini toping.
2. G ratsional sonlar to`plami, $R$ haqiqiy sonlar to`plami bo`lsa $G\cap R$ ni toping.
3. Ratsional va irratsional sonlar to`plami birlashmasini toping.
4. A to`g`ri to`rtburchaklar to`plami, B romblar to`plami bo`lsa, $A\cap B$ ni toping.
5. A juft sonlar to`plami $Z$ butun sonlar to`plami bo`lsa, ularning kesishmasini toping.
6. A juft sonlar to`plami $B$ toq sonlar to`plami bo`lsa, A va B larning kesishmasini toping.
7. $\{0;\ 1,2\}$ bo`lsa hamma qism to`plamlar to`plamini toping.
8. A juft sonlar to`plami, $B$ toq sonlar to`plami, C tub sonlar to`plami bo`lsa, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cap C$ toping.
9. $\{1,2,4,6,9\}$, $B=\{3,4,5,8,10\}$ bo`lsa $A\setminus B$ va $B\setminus A$ larni toping.

10. toping. G ratsional sonlar to`plami, $R$ haqiqiy sonlar to`plami bo`lsa $G \setminus R$ ni toping.

11. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{d,e,f,g\}$ va $C = \{a,f,g,k,c\}$ to`plamlardan har ikkitasining kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.

12. Markazlari bitta nuqtada joylashgan hamda radiuslari 1 va 3 ga teng doiralar nuqtalaridan iborat to`plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.

13. To`plamlarning ayirmasi bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.

14. Ushbu amallar natijalarini aniqlang: $\varnothing \bigcap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \bigcap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \bigcup \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\}$.

15. Ixtiyoriy A to`plam uchun $A \bigcup \varnothing$, $A \bigcap \varnothing$, $A - \varnothing$, $A - A$, $\varnothing - A$ to`plamlarni aniqlang.

16. $A - B = B - A$ tenglik o`rinli bo`ladigan A va B to`plamlarga misollar keltiring.

17. O`zaro kesishmaydigan to`plamlar bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.

18. O`zaro kesishadigan to`plamlar bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.

19. Ixtiyoriy A to`plam uchun $A \bigcup \overline{A} = \overline{A} \bigcup A = \mathbf{U}$ bo`lishini ko`rsating.

20. Ixtiyoriy A va B to`plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o`rinli bo`lishini ko`rsating:

a) $A \setminus B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$;

b) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ – a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing \Rightarrow A = B$;

e) $A = B \Rightarrow A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$ – d) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

f) $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, ya`ni ayirish amali kesishma va to`ldirish amallari yordamida ifodalanishi mumkin;

g) $\varnothing \subseteq A \bigcap B \subseteq A \bigcup B$.

21. Chekli A va B to`plamlar uchun $|A|$, $|B|$, $|A \bigcup B|$ va $|A \bigcap B|$ sonlar orasidagi bog`lanishni toping.

22. Ixtiyoriy A, B va C to`plamlar uchun quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) $A \bigcup B \subseteq C \Rightarrow (A \subseteq C \text{ va } B \subseteq C)$;

b) $(A \subseteq C \text{ va } B \subseteq C) \Rightarrow A \bigcup B \subseteq C$ – a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $A \subseteq B \bigcap C \Rightarrow (A \subseteq B \text{ va } A \subseteq C)$;

e) $(A \subseteq B \text{ va } A \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq B \bigcap C$ – d) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

f) $A \subseteq B \Rightarrow A \bigcup C \subseteq B \bigcup C$;

g) $A \subseteq B \Rightarrow A \bigcap C \subseteq B \bigcap C$;

h) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;

i) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

23. 12-topshiriqning f), g), h) va i) bandlaridagi tasdiqlarga teskari tasdiqlarni tahlil qiling va ular bajarilmaydigan hollarda A, B va C to`plamlarga misol keltiring.

24. Ixtiyoriy a, b va c sonlar uchun to`g`ri bo`lgan $a \le b \Leftrightarrow a + c \le b + c$, $a \le b \Leftrightarrow a - c \le b - c$ va $a \le b \Leftrightarrow c - b \le c - a$ munosabatlardagi $a$, $b$ va $c$ sonlarni $A$, $B$ va $C$ to`plamlar bilan, "$\le$", "+" va "–" belgilarni "$\subseteq$", "$\bigcup$" va "$\setminus$" belgilar bilan mos ravishda almashtirib, hosil bo`lgan munosabatlarning to`g`riligini tahlil qiling.

25. $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ 3ga bo'linadi}\}$ bo`lsin. $N$ to`plamni universal to`plam deb hisoblab, $\overline{B}$ to`plamni toping.

26. Natural, butun, haqiqiy va irratsional sonlar to`plamlari bilan bog`liq universal to`plamlarga misollar keltiring.

27. $A = \{a,b,c,d,e\}$ to`plam uchun 2^A buleanni aniqlang.

28. Bir uyda yashovchi oilada ota (t), ona (n) va to`rt nafar farzand ( $1,2,3,4$ ) bo`lsa, oila a`zolarining uyda bo`lishlari vaziyatlariga mos barcha imkoniyatlarni to`plamlar ko`rinishida yozing va bu imkoniyatlar to`plamlari to`plamining quvvatini aniqlang.
29. Universal to`plam tushunchasi bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.
30. Bulean tushunchasi bilan bog`liq masala o`ylab toping va uni hal qiling.

Mavzuga oid testlar to`plami

1. To`plamlar nazariyasining asoschisi kim?
A) Pifagor ;
B) Dekart ;
C) Kantor ;
D) Ferma ;
E) Gauss .

2. Quyidagi to`plamlardan qaysi biri bo`sh to`plam emas?
A) Kvadrati manfiy bo`lgan haqiqiy sonlar;
B) sinx = 2 tenglama yechimlari to`plami;
C) Ikkita burchagi o`tmas bo`lgan uchburchaklar to`plami;
D) Kubi manfiy bo`lgan sonlar to`plami;
E) Ikkiga bo`linmaydigan juft sonlar to`plami.

3. Qachon A to`plam B to`plamning qismi deyiladi?
A) Agar A va B bir xil elementlardan tashkil topgan bo`lsa.
B) Agar A va B har xil elementlardan tashkil topgan bo`lsa.
C) Agar B to`plamning har bir elementi A to`plamga tegishli bo`lsa.
D) Agar A to`plamning har bir elementi B to`plamga tegishli bo`lsa.
E) To`g`ri javob keltirilmagan.

4. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto`g`ri?
A) bo`sh to`plam barcha to`plamlarning to`plam ostisi bo`ladi;
B) har bir to`plam o`zining to`plam ostisi bo`ladi;
C) Agar $A \subset B$ va $C \subset A$ bo`lsa, unda $C \subset B$ bo`ladi;
D) Agar $B \subset A$ bo`lsa, unda $A \cap B = B$ bo`ladi;
E) Agar $B \subset A$ bo`lsa, unda $A \cup B = B$ bo`ladi;

5. A va B to`plamlar birlashmasi amali qayerda ifodalangan?
A) $A \cup B$;
B) $A \cap B$;
C) $A \subset B$;
D) $A \supset B$;
E) $A \setminus B$.

6. Agar $x \in A \cup B$ bo`lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o`rinli emas?
A) $x \in A$, $x \notin B$;
B) $x \notin A$, $x \in B$;
C) $x \notin A$, $x \notin B$;
D) $x \in A$, $x \in B$;
E) barcha tasdiqlar o`rinli bo`ladi .

7. To`plamlar birlashmasi amalining xossasi qayerda noto`g`ri ko`rsatilgan? (Ω – universal to`plam, $\varnothing$ – bo`sh to`plam)

A) $A \cup B = B \cup A$;

B) $A \cup \varnothing = A$;

C) $A \cup A = A$;

D) $A \cup \Omega = \Omega$.

E) Barcha xossalar to`g`ri ko`rsatilgan.

8. A = [–3; 0] va B = (–1; 5] to`plamlar birlashmasi qayerda to`g`ri ko`rsatilgan?

A) [–3; 5];

B) [–3; –1];

C) (–1; 0);

D) (0; 5];

E) [–1; 5].

9. A va B to`plamlar kesishmasi amali qayerda ifodalangan?

A) $A \cup B$;

B) $A \cap B$;

C) $A \subset B$;

D) $A \supset B$;

E) $A \setminus B$.

10. Agar $x \in A \cap B$ bo`lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o`rinli bo`ladi?

A) $x \in A$, $x \notin B$;

B) $x \notin A$, $x \in B$;

C) $x \notin A$, $x \notin B$;

D) $x \in A$, $x \in B$;

E) barcha tasdiqlar o`rinli emas .

11. Agar universal to`plam Ω=(–∞, ∞) va A=(2,5] bo`lsa, C(A) to`plam qayerda to`g`ri ifodalangan ?

A) C(A)=[–∞,2] ;

B) C(A)=(5, ∞] ;

C) C(A)=[0,2] ∪(5, ∞) ;

D) C(A)= (–∞, 2] ∪(5, ∞) ;

E) to`g`ri javob keltirilmagan.

KOMBINATORIKADA KO`P QO`LLANILADIGAN USUL VA QOIDALAR

KOMBINATORIKADA KO`P QO`LLANILADIGAN USUL VA QOIDALAR

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga kombinatorikada ko`p qo`llaniladigan usul va qoidalar amallar bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Misol. 1) {a;v;s} n=3, k=2 =>{a;v},{a;s},{v;s},{v;a},{s;a},{s;v}=> A_4^2 = 6

2) {a;v;s;d} n=4, k=3 =>{a;v;s},{a;s;v},{v;a;s},{s;a;v},{s;v;a} …=> A_4^3 = 16

Umumiy holda

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1)$$

Masala. Talaba 8 kunda 4 ta imtixon topshirishi kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin.

Yechish: Kunlarni 1,2,3, … ,8 kabi nomerlab chiqsa, imtixonlar qo`yilish kunlari {1;2;3;4}, {1;3;2;5} kabi to`rtliklardan iborat va ularning soni

$$A_8^4 = 1680$$

S_n^k sonlari yordamida quyidagi formulani yozish mumkin

$$(a+v)^n = S_n^0\, a^n v^0 + S_n^1\, a^{n-1} v^1 + \ldots + S_n^k\, a^{n-k} v^k + \ldots + S_n^n\, a^0 v^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad (2)$$

Bu Nyuton binomi formulasi deyiladi, S_n^k binomial koeffitsentlar deb ataladi. Nyutondan oldin bu formulani **Umar Xayyom** (1048-1131), **G`iyosiddin ali-Qushchi** (1430) ham bilishgan. Nyutonning xizmati shuki, u (3) formulani nafaqat natural n soni uchun, balki kasr sonlar uchun ham o`rinli ekanligi ko`rsatgan.

Nyuton binomidan va ta`rifdan S_n^k uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi

1) a = v = 1 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

2) 2) a=1, v= -1 $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

3) $S_n^k = S_n^{n-k}$ 4) $S_n^0 = S_n^n = 1$ munosabatlarning to`g`riligini tekshirishni talabalarga xavola qilinadi.

Misol. Beshta odamdan uchta kishidan iborat komissiyani necha xil usulda tuzish mumkin:

$$S_5^3 = \frac{5!}{3! \otimes 2!} = 10$$

Misol. 1) n = 2 => {a;v},{v;a}=> R_2=2

2) n = 3 =>{a;v;s},{a;s;v},{s;a;v},{v;a;s},{v;s;a},{s;v;a}=> R_3=6

Umumiy xolda

$$R_n = n! \quad (2)$$

formula o`rinli.

Misol. Navbat kutib turgan 5 ta odamni R_5= 5! = 120 usulda navbatga joylashtirish mumkin.

**Ta`rif:** m elementni n tadan o`rinlashtirish deb, shunday birlashmalarga aytiladiki, ularning har birida berilgan m elementdan olingan n ta element bo`lib, ular bir- birlaridan yo elementlari bilan, yoki elementlarining tartibi bilan farq qiladi(n$\leq$ m bo`lishi shart).

m ta elementdan n tadan tuzulgan o`rinlashtirishlar soni A_m^n simvol bilan belgilanadi.

(A fransuzcha “arrangement”, ya`ni o`rinlashtirish degan so`zning bosh harfidir.)

$A_m^n = m(m-1)(m-2)....(m-n+1)$. Bu o`rinlashtirishlar sonini topish formulasi hisoblanadi.

Misol. $A_7^4 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$

Misol. Sinfda 10 fandan dars bo`lib har kuni 5 xil usul bilan dars o`tiladi. Bir kunlik dars necha xil usul bilan taqsimlanishi mumkin?

Yechish: Masala o`rinlashtirishlar sonini aniqlash bilan yechiladi.

$A^5{}_{10} = 10*9*8*7*6 = 30240$ usul bilan taqsimlab qo`yish mumkin.

O`rin almashtirish.

**Ta`rif:** Faqat elementlarning tartibi bilangina farq qilgan(yani n=m) o`rinlashtirishlar o`rin almashtirishlar deyiladi.

M elementdan tuzilgan o`rin almashtirishlar soni P_m simvol bilan belgilanadi.

(P fransuzcha “Permution”, ya`ni o`rin almashtirish so`zining bosh harfidir.)

$$P_m = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (m-2)\cdot (m-1)\cdot m.$$

Bu formula o`rin almashtirishlar sonini topish formulasi hisoblanadi.

Misollar. $P_3 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6; P_6 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720; P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ va hokazo.

Masala. 8 ta stol qo`yilgan; unga 8 kishini necha xil usul bilan o`tqazish mumkin.

Yechish: Bu masala o`rin almashtirishlar sonini aniqlash bilan yechiladi.

$$P_8 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 40320 \text{ xil usul bilan.}$$

Gruppalash.

**Ta`rif:** m ta elementdan n tadan tuzilgan gruppalash deb, m elementdan n tadan tuzilgan o`rinlashtirishlardan bir- biridan eng kamida bitta elementi bilan farq qiladigan o`rinlashtirishlarga aytiladi.

M elementdan n tadan gruppalash soni C_m^n simvol bilan belgilanadi.

(C-fransuzcha “Combinasion” ,ya`ni gruppalash degan so`zning bosh harfi).

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot ....\cdot n}.$$

Bu formula gruppalashlar sonini topish formulasi hisoblanadi.

Misollar. 1) $C_9^5 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 126.$

2) $C_{25}^4 = \dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 12650.$

3) $C_{2x}^2 = 1$ tenglamani yeching.

Yechish:

$$C_{2x}^2 = \frac{2x\cdot(2x-1)}{1\cdot 2} = 1 yoki 2x^2 - x - 1 = 0, bundan:$$

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4}; x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2.}$$

Bulardan yolg`iz $x_1 = 1$ berilgan tenglamani qanoatlantiradi, $x = -\frac{1}{2}$ berilgan tenglamaning chet ildizidir.

4) $C_{m+1}^{n+1} \div C_{m+1}^{n} \div C_{m+1}^{n-1} = 5 \div 5 \div 3$ berilgan. n va m sonlar topilsin.

Yechish:

$$1 = \frac{5}{5} = \frac{C_{m+1}^{n+1}}{C_{m+1}^{n}} = \frac{\frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m+1-n+1)\cdot(m+1-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots n\cdot(n+1)}}{\frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m+1-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}} = \frac{m-n+1}{n+1} \, yoki. n+1 = m-n+1,$$

Bundan: $m = 2\cdot n$.

Yana:

$$\frac{5}{3} = \frac{C_{m+1}^{n}}{C_{m+1}^{n-1}} = \frac{\frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m+1-n+2)\cdot(m+1-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}}{\frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m+1-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}} = \frac{m-n+2}{n} \, yoki. 5n = 3m - 3n + 6 bundan:$$

$$n = \frac{3m+6}{8}.$$

Endi bundagi m ning o`rniga topilgan m=2n ni qo`ysak: $n = \frac{3\cdot 2+6}{8} \, yoki 2n = 6, . n = 3 bo`ladi.$ Bu holda $m = 2\cdot 3 = 6.$

5) $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^{2}$ tenglamani qanoatlantiruvchi x ning qiymatini toping. (Bu misolda $C_m^n = C_m^{m-n}$ formuladan foydalandik bu formulaning isboti keyinchalik beriladi.)

Yechish:

$$12\cdot C_{x+3}^{x-1} = 12C_{x+3}^{x+3-x+1} = 12C_{x+3}^{4} = 12\cdot\frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot x}{2};$$

$A_{x+1}^{2} = (x+1)\cdot x; \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot x}{2} = 55(x+1)\cdot x$ yoki $(x+3)\cdot(x+2) = 110$,

$x^2 + 5x - 104 = 0, x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25+416}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{441}}{2} = \frac{-5\pm 21}{2}$; $x_1 = 8$; $x_2 = -13$ (chet ildiz).

6). $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$ ni yeching.

Yechish: $C_x^y = \frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-y+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot y}$,

$$C_x^{y+2} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots(x-y+1)\cdot(x-y)\cdot(x-y-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot y\cdot(y+1)\cdot(y+2)}.$$

$$C_x^2 = \frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot 2}.$$

Bularni o`rinlariga qo`yib soddalashtirsak:

$$\begin{cases} (x-y)\cdot(x-y-1) = (y+1)\cdot(y+2), \\ x^2 - x - 306 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo`ladi. Ikkinchi tenglamadan : x=18 bo`lib, buni birinchi tenglamaga qo`ysak: $(18-y)(17-y) = y^2 + 3y + 2$ yoki $38y = 304; y = \frac{304}{39} = 8.$

$C_m^n = C_m^{m-n}$ tenglikning isboti. Buning uchun quyidagi ishlarni bajaramiz .

$$C_m^n = \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-n)} =$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)\cdot(m-n+1)\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot m}{P_n\cdot P_{m-n}} = \frac{P_m}{{}_nP_n\cdot P_{m-n.}}\ .$$

Bu gruppalashlar soni formulasining boshqacha ko`rinishi. Endi chiqarilgan formulada n ni (m-n) bilan almashtirsak:

$$C_m^{m-n} = \frac{P_m}{P_{m-n}\cdot P_n} = C_m^n$$

hosil bo`ladi. Demak, $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Misol. $C_{25}^{23} = C_{25}^{25-23} = C_{25}^{2} = \frac{25\cdot 24}{1\cdot 2} = 300$.

Mavzuga doir misol va masalalar

1).Quyidagilarni hisoblang:

$C_{21}^{18}; C_{50}^{45}; C_{120}^{110}; \frac{A_8^3 + A_6^4}{A_{12}^4}; \frac{2\cdot P_3 + 3A_4^3}{5\cdot P_5 - P^3}$

2).Ushbu tenglamalar yeching:

$A_x^2 = 0;\quad A_x^2 = 4\cdot x - 6; C_x^4 = 0;\ C_{x-3}^2 = 21;\ C_{x+1}^5 = \frac{3\cdot A_x^3}{8}.$

3).Tenglamalar sistemasi yechilsin:

a) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 25\cdot x, \\ C_{x-1}^{y} = 10. \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_x^{n-3} : A_x^{n-2} = 1:8, \\ C_x^{n-3} : C_x^{n-2} = 5:8. \end{cases}$

4) Ushbu tengliklarning to`g`riligini isbotlang .

a) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$;b) $C_{m+1}^7 = C_{m+1}^{m-6}$.

5) Uch o`smir va yetti qiz ikkita qayiqda daryo bo`ylab suzishga otlanishdi. Ularni ikkita qayiqqa har qaysi qayiqda hech bo`lmaganda bir o`smir bo`ladigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish
mumkin.

6) Tekislikda 15 ta nuqta berilgan. Ularning hech bir uchtasi bir to`g`ri chiziqda yotmaydi. Bu to`g`ri chiziqlar nechta turli to`g`ri chiziqlar va aylanalarni aniqlaydi?

7) To`garak qatnashchilari bir o`yin uchun uch xil rangdagi raqamlardan no`merlar yozishga kelishdilar. Birinchi o`ringa uchta qizil rangdagi raqam, ikkinchi o`ringa ikkita sariq rangdagi raqam, uchinchi o`rindagi 4 ta ko`k rangdagi raqam yoziladi. Agar qizil rangda1,2,3,4,6 raqamlarni, sariq rangda 0,2,5,7 raqamlarni va ko`k rangda 1,3,5,6,7,8,9 raqamlarni yozish mumkin bo`lsa, hammasi bo`lib necha xil nomerlar yozish mumkin?

8) Tenglamani yeching:

a) $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 72;$ b) $A_x^4 = 6\cdot A_{x-2}^2$

c) $C_x^{x-2} = 45.$

d) $\frac{P_{x+2}}{A_x^n\cdot P_{x-n}} = 132.$

e) $C_{2x+8}^{2x+3} = 13\cdot A_{2x+6}$

f) $C_x^{x-3} + C_x^{x-2} = 15\cdot(x-1).$

g) $C_{4x+9}^{4(x+1)} = 5 \cdot A_{4x+7}^{3}$

9) Tenglamalar sistemasini yeching:

a) $\begin{cases} A_{m-2}^{n} : A_{m-2}^{n-1} = 3 \\ C_{m-2}^{n} : C_{m-2}^{n-1} = 0{,}6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{2x}^{n-2} : A_{2x}^{n-3} = 8 \\ C_{2x}^{n-2} : C_{2x}^{n-3} + 2\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Ota bog`dan olmalar keltirdi. Bolalari undan nechta olma keltirganini so`rashdi. Otasi ularni sanamaganini, lekin ularni 2 talab, 3 talab, 4 talab, 5 talab, 6 talab va 7 talab qo`yib chiqqanida har gal bitta olma ortib qolganini aytdi. Ota kami bilan nechta olma keltirgan bo`lishi mumkin?

A) 421 B) 214 C) 412 D) 124 E) 241

2. O`n ikki do`st maktabni bitirgach har yili bitta kafeda uchrashishga kelishdilar. Ular taasurotlari bilan o`rtoqlashish va suhbatlashish uchun stollar atrofida 4 tadan o`tirish qulay deb hisobladilar? Ularning har biri boshqa do`stlarining har biri bilan birorta stol atrofida o`tira olishiga necha yil kerak bo`ladi?

A) 165 B) 651 C) 156 D) 561 E) 516

3. Shahmat musobaqasida 130 partiya (o`yin) o`ynaldi. Barcha qatnashchilar bir-birlari bilan bittadan partiya o`ynashdi, biroq ikkita o`yinchi har biri 5 tadan o`yin o`tkazgach, musobaqadan chiqib ketdi. Musobaqada dastlab qancha o`yinchi bo`lgan?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

4. 10 ta raqamdan avtomashinalarning nechta har xil uch xonali son tuzish mumkin?

A) 10 000 B) 1 000 C) 100 D) 100 000 E) 1

5. Ushbu 0,1,2,3,4,5 raqamlardan nechta har xil uch xonali son tuzish mumkin?

A) 180 B) 170 C) 801 D) 810 E) 710

6. Gruppada 30 o`quvchi bor. Ularning ichida 3 kishini EHM da ishlash uchun ajratirish kerak. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin?

A) 4060 B) 460 C) 4600 D) 6040 E) 6400

7. Turli rangdagi 5 to`p mato bor. Bu matolardan har bir mato faqat bitta polosani egallaydigan qilib nechta turli besh rangli bayroqlar tayyorlash mumkin?

A) 120 B) 210 C) 200 D) 1200 E) 201

8. Xokkey komandasi tarkibida 3 ta hujumchi, 2 ta himoyachi va 1 darvozabon bo`ladi. Agar trener ixtiyorida 6 ta hujumchi, 4 ta himoyachi va 2 ta darvozabon bo`lsa, u nechta turli hokkey komandasi tuzishi mumkin?

A) 240 B) 420 C) 402 D) 204 E) 400

9. 1 dan 100 gacha bo`lgan sonlar orasida, 2 ga ham , 3 ga ham bo`linmaydiganlari nechta?

A) 33 B) 30 C) 32 D) 21 E) 19

10. Shaxmat turnerida ishtirok etayotganlarning har biri qolgan o`yinchilar bilan 2 partiyadan shaxmat o`ynadi. Agar turnerda hammasi bo`lib 462 partiya o`ynalgan bo`lsa , turner ishtirokchilari necha kishi bo`lgan?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 25

11. Har qanday 3 tasi bir to`g`ri chiziqda yotmaydigan 6 ta nuqta berilgan. Shu 6 ta nuqtalar orqali nechta turlicha to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin?

A) 6 B) 12 C) 10 D) 36 E) 15

12. Kitob betlarini sahifalab chiqish uchun 1012 ta raqam ishlatildi. Agar sahifalash 3 betdan boshlangan bo`lsa, kitob nechta betdan iborat?

A) 374 B) 400 C) 506 D) 421 E) 434

13. Futbol chempionatidagi komandalarning barchasi bir-biri bilan bir martadan o`ynagandan keyin hammasi bo`lib 120 match o`tkazildi. Chempionatda nechta komanda ishtirok etgan?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 20

14. 13 kishi bir - biri bilan salomlashganda qo`l berib ko`rishishlar soni qancha bo`ladi?

A) 169 B) 156 C) 78 D) 130 E) 143

15. Qaysi masala kombinatorik bo`lmaydi?

A) To`plam elementlaridan ma`lum sondagi elementli barcha qism to`plamlar sonini topish;

B) To`plam elementlaridan ma`lum sondagi elementlarni tanlab olishlar sonini topish;

C) To`plamning ma`lum sondagi bir qism elementlari o`rnini almashtirishlar sonini topish;

D) To`plamdagi barcha elementlar o`rnini almashtirishlar sonini topish;

E) To`plamning eng katta va eng kichik elementlarini topish.

16. Kim birinchi bo`lib kombinatorikani mustaqil fan sifatida o`rgangan?

A) Dekart; B) Nyuton; C) Kantor; D) Leybnits; E) Paskal.

17. Agarda α tanlovni $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo`lsa, kombinatorikaning qo`shish qoidasi qayerda to`g`ri ko`rsatilgan?

A) n (α yoki β)= $n(\alpha) + n(\beta)$; B) n (α va β)= $n(\alpha) + n(\beta)$;

C) n (α yoki β)= $n(\alpha) + n(\beta) - n$ (α va β);

D) n (α yoki β)= $n(\alpha) + n(\beta) + n$ (α va β);

E) $n(\alpha + \beta) = n(\beta) + n(\alpha)$.

18. Agarda α tanlovni $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo`lsa, kombinatorikaning ko`paytirish qoidasi qayerda to`g`ri ko`rsatilgan?

A) n (α yoki β)= $n(\alpha) \cdot n(\beta)$;

B) n (α va β)= $n(\alpha) \cdot n(\beta)$;

C) $n(\alpha \cdot \beta) = n(\alpha) \cdot n(\beta)$;

D) n (α va β)= $n(\alpha)$en$(\beta) - n$ (α yoki β);

E) n (α va β)= $n(\alpha)$en$(\beta) + n$ (α yoki β).

19. I o`quv guruhida 20, II o`quv guruhida esa 25 talaba o`qiydi. Kengashga ikkala guruhdan bitta talabani vakil sifatida tanlash kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

A) 20 ; B) 25 ; C) 35 ; D) 45 ; E) aniq ko`rsatib bo`lmaydi.

20. Mahsulotlar partiyasida 20 ta mahsulot bor. Bu partiyadan ikkita mahsulotni necha usulda tanlab olish mumkin?

A) 20 ; B) 40 ; C) 85 ; D) 240 ; E) 380 .

21. I qutida 8 dona oq , II qutida esa 7 dona qora sharlar bo`lib, ular nomerlangan. Oq va qora sharlardan iborat juftlikni necha usulda tanlab olish mumkin?

A) 8 ; B) 7 ; C) 15 ; D) 56 ; E) 72 .

22. Berilgan n ta elementdan k tadan kombinatsiyalar soni C_n^k qaysi formula bilan topiladi?

A) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n+k)!}$;

B) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!}$; C) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

D) $C_n^k = \dfrac{k!}{n!(n+k)!}$;

E) $C_n^k = \dfrac{k!}{n!(n-k)!}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. n(n>2) ta elementdan n–3 tadan kombinatsiyalar va o`rinlashtirishlar sonini aniqlang.
2. $(2+e^n)^5$ binomning yoyilmasini yozing.
3. $(x-3)^n$ (n>5) binom yoyilmasidagi x^4 daraja oldidagi koeffitsiyentni toping.

MATRITSA USTIDA AMALLAR

MATRITSA USTIDA AMALLAR

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga matritsa ustida amallar bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Matritsa deb sonlarning to`g`ri burchakli jadvaliga aytiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Belgilashlar: A - matritsa; a_{ij} - matritsa elementlari; i - berilgan element joylashgan satr raqami; j - unga mos ustun raqami; m - matritsadagi satrlar soni; n - undagi ustunlar soni.

Agar $m=n$ bo`lsa matritsa kvadrat matritsa deb ataladi. n - soni matritsaning tartibi deyiladi.

Bir xil o`lchamga ega bo`lgan matritsalarning mos elementlari o`zaro teng bo`lsa, bunday matritsalar o`zaro teng matritsalar deb ataladi.

Agar matritsaning barcha elementlari nollardan iborat bo`lsa, bunday matritsa nolli matritsa deb ataladi.

Agar kvadrat matritsaning asosiy diagonalidagi barcha elementlari 1, qolganlari 0 bo`lsa, bunday matritsa birlik matritsa deb ataladi.

Matritsalar ustida chiziqli amallar
Matritsalarni qo`shish

Bir hil $m\times n$ o`lchamli $A$ va $B$ matritsalarning yig`indisi deb, huddi shunday o`lchamli $C$ matritsaga aytiladiki, bu matritsaning har bir elementi $A$ va $B$ matritsalarning mos elementlarining yig`indisidan iborat bo`ladi:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \ i=1,\overline{m},\ \ j=1,\overline{n}$$

Misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ matritsalarning yig`indisini toping.

Yechish: Berilgan matritsalarning bir xil joyda turgan elementlarini qo`shib, S = A + V matritsa elementlarini hisoblaymiz.

$$c_{11}=a_{11}+b_{11}=2-1=1;\ c_{12}=-3+4=1;\ c_{13}=1+0=1;\ c_{14}=1-1=0;$$

$$c_{21}=0+2=2;\ c_{22}=4-2=2;\ c_{32}=-2+5=3;\ c_{14}=8+7=15.$$

Shunday qilib, S = $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$

Matritsani songa ko`paytirish

Matritsani songa ko`paytirish deb, o`lchami berilgan matritsa o`lchamiga teng bo`lgan, har bir elementi berilgan matritsa elementini berilgan songa ko`paytirishdan hosil bo`lgan matritsaga aytiladi.

Misol. Agar $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ bo`lsa, 5A – 2V matritsani toping.

Yechish:

$$5A=\begin{pmatrix}10 & -15 & 5\\ -5 & 0 & -10\end{pmatrix},\ 2B=\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ -6 & 2 & -8\end{pmatrix},$$

$$5A-2B=\begin{pmatrix}10-8 & -15-6 & 5-4\\ -5+6 & 0-2 & -10+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -21 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, 5A – 2V $=\begin{pmatrix}2 & -21 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$

Matritsalarni ko`paytirish

O`lchami $m\times p$ bo`lgan A matritsa va ulchami $p\times n$ bo`lgan $B$ matritsalarning ko`paytmasi deb o`lchami $m\times n$ bo`lgan shunday C matritsaga aytiladiki, uning har bir elementi C_{ij} quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj},i=1,...,m,\ j=1,...,n.$$

Shunday qilib, c_{ij} element A matritsaning i - chi satrini B matritsaning unga mos j - chi ustuniga ko`paytmasining yig`indisidan iborat ekan.

Matritsalarni ko`paytirish amali kommutativ emas, ya`ni $AB\neq BA$. Haqiqatdan ham, AB ko`paytma mavjud bo`lsa, o`lchamlari to`g`ri kelmasligi sababli $BA$ ko`paytma umuman mavjud bo`lmasligi mumkin. Agar $AB$ va $BA$ lar mavjud bo`lsa ham, ularning o`lchamlari har hil bo`lishi mumkin.

Bir hil o`lchamli kvadrat matritsalar uchun $AB$ va $BA$ ko`paytmalar mavjud va ular bir hil o`lchamga ega bo`ladi, ammo umuman olganda mos elementlari teng bo`lmaydi.

Misol. Quyidagi matritsalarni bir-biriga ko`paytirish mumkinmi yoki yo`qmi? Shuni aniqlang. Agar ko`paytma mavjud bo`lsa, uni hisoblang.

$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}.$

Yechish: A va B matritsalarning o`lchamlarini taqqoslaymiz. $A[3\times 2]$, $B[2\times 2]$. Bundan $n=l$, $m\neq k$, shuning uchun $AB[3\times 2]$ mavjud, ko`paytma BA esa mavjud emas.

AB ko`paytma elementlarini topamiz:

(ab)11 = 0 · 5 + 3 · 7 = 21; (ab)12 = 0 · 6 + 3 · 8 = 24; (ab)21 = 4 · 5 – 2 · 7 = 6;
(ab)22 = 4 · 6 – 2 · 8 = 8; (ab)31 = 1 · 5 – 1 · 7 = -2; (ab)32 = 1 · 6 – 1 · 8 = -2.

Shunday qilib, $AB=\begin{pmatrix}21 & 24\\ 6 & 8\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, BA mavjud emas.

Misol. Agar $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ bo`lsa, AB va BA ni toping.

Yechish: matritsalarni ko`paytirish mumkinmi yoki yo`qligini bilish uchun ularning o`lchamlarini aniqlaymiz.

A[2×4], B[4×2]. Bundan n = l = 4, m = k = 2, shuning uchun AV va VA matritsalar mavjud, hamda AV[2×2], BA[4×4].

S = AV matritsaning elementlarini hisoblash uchun A matritsaning satr elementlarini unga mos bulgan V matritsaning ustun elementlariga ko`paytiriladi.

s11 = 2 · 2 + (-2)(-1) + 1 · 1 + 0 · 2 = 9

(A ning birinchi satr elementlarining V ning birinchi ustun elementlariga kupaytmasining yig`indisi; hisoblanayotgan elementning birinchi indeksi A matritsaning satrini, ikkinchi indeksi esa V matritsa ustunini bildiradi).

s12 = 2 · 2 + (-2) · 0 + 1 · 1 + 0 · 4 = 5;
s21 = -3 · 3 + 1 · (-1) + (-1) · 1 + 1 · 2 = -9;
s22 = -3 · 2 + 1 · 0 + (-1_ · 1 + 1 · 4 = -3.

Shunday qilib, $C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

D = BA matritsa elementlarini hisoblayotganda V ning satr elementlari A ning ustun elementlariga ko`paytiriladi.

d11 = 3 · 2 + 2 · (-3) = 0; d12 = 3 · (-2) + 2 · 1 = -4; d13 = 3 · 1 + 2 · (-1) = 1;
d14 = 3 · 0 + 2 · 1 = 2; d21 = -1 · 2 + 0 · (-3) = -2; d22 = -1 · (-2) + 0 · 1 = 2;
d23 = -1 · 1 + 0 · (-1) = -1; d24 = -1 · 0 + 0 · 1 = 0; d31 = 1 · 2 + 1 · (-3) = -1;
d32 = 1 · (-2) + 1 · 1 = -1; d33 = 1 · 1 + 1 · (-1) = 0; d34 = 1 · 0 + 1 · 1 = 1;
d41 = 2 · 2 + 4 · (-3) = -8; d42 = 2 · (-2) + 4 · 1 = 0; d43 = 2 · 1 + 4 · (-1) = -2;
d44 = 2 · 0 + 4 · 1 = 4.

Shunday qilib, $D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Transponirlangan matritsa deb, ularning joylanishlari saqlangan holda satr va ustunlarini almashtirishdan hosil bo`lgan matritsaga aytiladi. Natijada $A$ matritsaga nisbatan transponirlangan $A'$ matritsa hosil bo`ladi, uning elementlari A matritsa elementlari bilan quyidagi munosabatda bog`lanadi:

a’ij = aji.

Determinantlar

Iikinchi tartibli determinant deb, ikkinchi tartibli kvadrat matritsa elementlari yordamida aniqlanuvchi quyidagi songa aytiladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinantning bosh diagonalida joylashgan elementlar ko`paytmasidan, yordamchi diagonalda joylashgan elementlar ko`paytmasi ayiriladi.

Misol. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$

Uchinchi tartibli determinant deb, uchinchi tartibli kvadrat matritsa elementlari yordamida quyidagicha aniqlanuvchi songa aytiladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Bu formulani eslab qolish uchun uchburchaklar qoidasidan foydalanish mumkin. U quyidagilardan iborat: ko`paytmasi determinantga «+» belgisi bilan kiruvchi elementlar quyidagicha joylashadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Bosh diagonalga simmetrik bo`lgan ikkta uchburchak hosil qilinadi. Ko`paytmasi determinantga «-» belgisi bilan kiruvchi elementlar ham, huddi shu kabi, yordamchi diagonalga nisbatan joylashadi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol. Determinantni hisoblang.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Yechish: 3-chi tartibli determinantni uning qoidasidan foydalanib hisoblaymiz.

$\Delta = 2\cdot 0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot(-3) =$

$= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$

Determinantlarning asosiy xossalarini berishdan oldin transponirlangan matritsa tushunchasining ta`rifini keltiramiz.

Determinantlarning asosiy xossalari

1. Transponirlash natijasida determinant o`zgarmaydi, ya`ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Determinantning satr(yoki ustun) elementlari biror songa ko`paytirilsa, determinantning qiymati shu songa ko`paytiriladi, ya`ni

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Nolli satr(yoki ustun)ga ega bo`lgan determinant nolga teng

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Ikkita bir hil satr(yoki ustun)ga ega bo`lgan determinant nolga teng

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Ikkita satr(yoki ustun)i o`zaro proporsional bo`lgan determinant nolga teng

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Determinantda ikkita satr(yoki ustun)i o`zaro almashtirilsa, uning qiymati (-1)ga ko`paytiriladi.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7.

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Determinantning biror satr(yoki ustun) elementlarini biror songa ko`paytirib, ikkinchi satr(yoki ustun)ning mos elementlariga qo`shilsa, determinantning qiymati o`zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Misol. Chiziqli tenglamalar sistemasiga tabiiy yondoshish uchun quyidagi sport mashg`ulotidagi o`lchash natijalari masalasini ko`raylik: Kurashchilarning tezkorlk sifatini rivojlantirish mashqni bajarish uchun sherikni 20 marta tashlashda tezkorlik va kuch sifatlari uchun 30 sek vaqt ajratdi. Tezkorlik va kuch sifatlarini rivojlantirishda kutiladigan natijalar mos ravishda 2,5t va 4.

Har bir mashqni bajarish uchun 30 sek, tezkorlikga 15 sek. Barcha sifatlar uchun foydalaniiladigan variant yechimi topilsin.

Yechish: x va u orqali tezkorlik va kuchning umumiy xajmini belgilab olamiz. Mashqni bajarish uchun taksimlash tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2,5} + \dfrac{y}{4} = 20 \\ \dfrac{x}{2,5} \cdot 30 + \dfrac{y}{4} \cdot 15 = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 8000 \\ 112x + 15y = 90000 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechishdan avval chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli yordamida yechish usulini ko`raylik. Ikki noma`lumli ikkita tengamalar sistemasi berilgan bo`lsin.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida bunday yechish usuli Kramer usuli deyiladi.

Endi yuqorida ko`rilgan masalani Kramer usulida yechamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 112 & 15 \end{vmatrix} = 120 - 560 = -440 \neq 0;$$

$$\Delta_x = -330000; \Delta_y = -176000;$$

$$x = \frac{-330000}{-440} = 750; \ y = \frac{-176000}{-440} = 400$$

Mavzuga doir misol va masalalar

Berilgan matritsalar ustida talab qilingan amallani bajaring.

1. A=$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ B=$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ 2A-B=?

2. A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ B=$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 3A-2B=?

3. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$+$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{18} \\ 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. C= (1 2 3), F=$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ C*F=?

5. A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ A*B=?

6. A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, B =$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ A*B=?

7. A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, A2 =?

8. A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, E-birlik matritsa 2A2+3A+5E =?

9. A=$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ A*B-C2=?

10. A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, C=(2 0 5), E- birlik matritsa A*B*C-3E=?

11. A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ A*B=?

12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$=?

13. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$*$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$=?

14. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$*$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$=?

15. A=$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 2A+5B=?

16. A=$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A+B=?

17. A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ A*C=?

18. A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ F=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ A*F=?

19. A=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ A2-A*B+2BA=?

20. A=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ A*B=?

21. A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ A*B=? B*A=?

22. A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ A2+A+E=?

23. A=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ A*B*C=?

24. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -9 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ =?

25. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ =?

26. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ =?

27. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$ =?

28. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} =?$

29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{20} = ?$

30. A=$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ B=$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ A+B matritsani toping.

A+B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 4+2 & 1+1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

31. A=$\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ B=$\begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$ A.B matritsani toping.

A.B = $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.26+(-12).15 & 7.45+(-12).26 \\ -4.26+7.15 & -4.45+7.26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Matritsa mazmuni qayerda to`g`ri ko`rsatilgan?

A) sonlar yig`indisi;
B) sonlar ko`paytmasi;
C) sonlar to`plami;
D) sonlar jadvali;
E) sonlar birlashmasi.

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.

A) 2×2; B) 2×3; C) 3×2; D) 3×3; E) 2×3=6.

3. Elementlari a_{ij} bo`lgan matritsa qachon nol matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij} elementlarning yig`indisi nolga teng bo`lsa;
B) Barcha a_{ij} elementlari nolga teng bo`lsa;
C) Barcha a_{ij} elementlarning ko`paytmasi nolga teng bo`lsa;
D) Biror satridagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo`lsa;
E) Biror ustundagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo`lsa.

4. Quyidagi matritsalarning qaysi biri nol matritsa bo`lmaydi?

$A)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad D)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

E) Keltirilgan barcha matritsalar nol matritsa bo`ladi.

5. Elementlari a_{ij} bo`lgan kvadrat matritsa qachon birlik matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij} elementlar birga teng bo`lsa;
B) a_{ii} =1 va a_{ij} =0 ($i \neq j$) bo`lsa;
C) Barcha a_{ii} diagonal elementlar birga teng bo`lsa;
D) Biror satrdagi barcha a_{ij} elementlar birga teng bo`lsa;
E) Biror ustundagi barcha a_{ij} elementlar birga teng bo`lsa.

6. Birlik matritsani ko`rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Birlik matritsani ko`rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

E) bu yerda birlik matritsa yo`q .

8. Qaysi shartda A_{mn} va B_{pq} matritsalarni ko`paytirish mumkin?

A) m=p; B) m=q; C) n=p; D) n=q; E) mq=np.

9. Quyidagi *A* va *B* matritsalar ustida qanday amallar bajarish mumkin?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

A) *A –B* ; B) *A·B* ; C) *B·A* ; D) *B–A* ; E) *A+B*.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. A va B matritsalar bo`yicha (*n*+2)A, (1–*n*)B, A+B, A–B va *n*A+(*n*–3)B matritsalarni toping:

$$A = \begin{pmatrix} n & 1-n & n+1 \\ 2n+1 & n & 2n-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2n & n+3 & n-2 \\ n+1 & n-4 & 1-2n \end{pmatrix}.$$

2. Berilgan A va B matritsalar bo`yicha A·B va B·A matritsalarni toping hamda A·B=B·A yoki A·B≠B·A ekanligini aniqlang:

$$A = \begin{pmatrix} n & n+1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2n & 2n-3 & n+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2n & 2n+1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{pmatrix}.$$

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMANI MATRITSA YORDAMIDA YECHISH

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMANI MATRITSA YORDAMIDA YECHISH

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa yordamida yechishni bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Bizga uchta noma`lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo`lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimini topish uchun bir necha usullar mavjud, bu usulllarni alohida - alohida qaraymiz.

1-usul (Kramer qoidasi).

Aytaylik, berilgan sistemaning asosiy determinanti noldan farqli bo`lsin, ya`ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Bu holda uning qolgan uchta yordamchi determinantlarini topamiz. Buning uchun asosiy determinantdagi ustun elementlarini navbatma - navbat ozod hadlar bilan almashtirib uchta sistemaning yordamchi determinatlarini tuzish mumkin.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} в_1 a_{12} a_{13} \\ в_2 a_{22} a_{23} \\ в_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} в_1 a_{13} \\ a_{21} в_2 a_{23} \\ a_{31} в_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} в_1 \\ a_{21} a_{22} в_2 \\ a_{31} a_{32} в_3 \end{vmatrix}$$

Endi berilgan sistemaning yechimini ya`ni ildizlarini:

$$X_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ X_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ X_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

tengliklar orqali topish mumkin.

Masalan:

$$\begin{cases} 2x - 4y = z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 1 - 12 + 5 + 6 + 4 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 1 - 12 + 5 + 9 - 4 = -16 \neq 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 9 + 1 - 6 - 3 = 0,$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-10-3+4+15-2+4=8\ ,$$

demak, $X_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{-16}{-8}=2,$

$X_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{0}{-8}=0,\ X_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{8}{-8}=-1,$ Javob: {2,0,-1}.

2-usul (Matritsalar yordamida).

Yuqoridagi tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}в_1\\ в_2\\ в_3\end{pmatrix}$$

Demak AX=B yoki

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}в_1\\ в_2\\ в_3\end{pmatrix}$$

Agar bundan X ni topsak, $X=\frac{B}{A}=A^{-1}B$.

Sistemani matritsalar yordamida yechish uchun sistema matritsasiga teskari bo`lgan matritsani topish talab etiladi.

A matritsaga teskari bo`lgan matritsa

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta}\\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta}\\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta}\end{pmatrix}$$

ko`rinishda topiladi.

Bu erda A_{ij} lar a_{ij} elementlarning algebraik to`ldiruvchilari, berilgan matritsa determinantidir. Endi matritsani matritsaga ko`paytirish amalidan foydalanib, berilgan sistemasini yechimini topish mumkin.

Masalan:

$$\begin{cases}2x-4y+z=3\\ x-5y+3z=-1\\ x-y+z=1\end{cases}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-10-12-1+5+4+6=-8$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-5+3=-2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(-4+1)=3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+4) = -2$$

Chiziqli tenglama deb,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

ko`rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $a_i$ va b – sonlar, $x_i$ - noma`lumlar. Shunday qilib, chiziqli tenglamaning chap tomonida no`malumlarning chiziqli kombinatsiyasi, o`ng tomonida esa son turadi.

Agar $b = 0$ bo`lsa, chiziqli tenglama bir jinsli, aks holda, ya`ni $b \neq 0$ bo`lsa, bir jinsli bo`lmagan tenglama deyiladi.

Chiziqli tenglamalar tizimi deb quyidagi ko`rinishdagi tizimga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1)$$

bu yerda a_{ij}, b_i - sonlar, x_j - noma`lumlar, n – noma`lumlar soni, m – tenglamalar soni ($i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$).

Chiziqli tenglamalar tizimining yechimi deb shunday $x_1, x_2, ..., x_n,$ sonlarga aytiladiki, bu sonlarni noma`lumlar o`rniga qo`yilganda, tizimning har bir tenglamasi o`rinli tenglikka aylanadi.

Agar chiziqli tenglamalar tizimi hech bo`lmaganda bitta yechimga ega bo`lsa birgalikda bo`lgan, aks holda, ya`ni yechimga ega bo`lmasa, birgalikda bo`lmagan tenglamalar tizimi deyiladi.

Shuningdek, agar birgalikda bo`lgan tenglamalar tizimi yagona yechimga ega bo`lsa aniqlangan, bittadan ko`p yechimga ega bo`lsa, aniqlanmagan tenglamalar tizimi deb yuritiladi.

1. Gauss usuli

Faraz qilaylik (1) tizimda $a_{11} \neq 0$ bo`lsin (bunga tenglamalar o`rnini almashtirish yordamida doimo erishish mumkin). Birinchi tenglamani har ikkala tomonini avval a_{11} ga bo`lamiz, so`ngra a_{i1} ga ko`paytiramiz, bu yerda i – navbatdagi tenglama tartibi.

Hosil bo`lgan tenglamalarni tizimning qolgan har bir mos tenglamasidan ayiramiz. Ma`lumki, hosil bo`lgan yangi tenglamalar tizimi berilgan tenglamalar tizimiga teng kuchlidir. Hosil bo`lgan yangi tizimda birinchi tenglamadan boshqa barcha tenglamalarda $x_1 = 0$ bo`ladi, ya`ni tizim quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \widetilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{nn}x_n = \widetilde{b}_n \end{cases}.$$

Agar yangi hosil bo`lgan tenglamalar tizimida $x_2$ ning oldidagi koffitsiyentlar hammasi nolga teng bo`lmasa shu asnoda x_2 ni ham yo`qotish mumkin.

Bu jarayonni tizimdagi barcha noma`lumlar uchun davom ettirib, berilgan tenglamalar tizimini quyidagi uchburchak shakliga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \ldots + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ x_2 + \ldots + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \hat{b}_n \end{cases} \quad (2)$$

Bu yerda $\widetilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \widetilde{b}_i$ va $\hat{b}_i$ belgilar bilan almashtirishlar natijasida hosil bo`lgan sonli koeffitsiyentlar va ozod xadlar belgilangan. (2) tizimning oxirgi tenglamasidan $x_n$ ni topamiz. So`ngra ketma-ket o`rniga qo`yish yordamida qolgan noma`lumlarni topamiz.

Misol. Tenglamalar tizimini Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Yechish: Gauss usuli berilgan tenglamalar tizimidagi noma`lumlarni ketma-ket yo`qotishdan iboratdir. Bu usulni qo`llash oson bo`lishi uchun 1-chi va 2-chi tenglamalarning o`rnini almashtiramiz.

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Endi 2-chi va 3-chi tenglamalardan x ni yo`qotamiz. Buning uchun birinchi tenglamani 3 ga ko`paytirib, ikkinchi tenglamadan, 2 ga ko`paytirib, 3-chi tenglamadan ayiramiz va quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -11y + z = 3 \end{cases}\cdot$$

2-chi tenglamaga 3-chi tenglamani qo`shib, 3-chi tenglamadan z ni yo`qotamiz:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -24y = 0 \end{cases}\cdot$$

Oxirgi tenglamadan $y = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qiymatni 2-chi tenglamaga qo`yib z ni aniqlaymiz. Topilgan y va z ni 1-chi tenglamaga qo`yib topamiz. z = 3, x = 1.

Shunday qilib, x = 1, u = 0, z = 3.

2. Kramer usuli

No`malumlar soni tenglamalar soniga teng bo`lgan quyidagi chiziqli tenglamalar tizimini qaraylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3)$$

Elementlari noma`lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan iborat Δ determinatni asosiy determinant deb ataymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ (4)$$

determinantda xj noma`lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan ustunni ozod hadlardan iborat ustun bilan almashtirishdan hosil bo`lgan determinantni Δ_{x_j} bilan belgilaymiz.

U holda:Agar $\Delta \neq 0$ bo`lsa, (3) tizim quyidagi formulalar bilan aniqlanuvchi yagona yechimga ega: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

Agar $\Delta = \Delta_{x_j} = 0$ bo`lsa, tizim cheksiz ko`p yechimga ega.

Agar $\Delta = 0$, va Δ_{x_j} lardan hech bo`lmaganda bittasi noldan farqli bo`lsa, tizim yechimga ega emas.

Misol. Tenglamalar tizimini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

demak, tenglamalar tizimi yagona yechimga ega.

Δx, Δu i Δz – larni topamiz.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Bundan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

3. Chiziqli tenglamalar tizimini teskari matritsa yordamida yechish

Chiziqli tenglamalar tizimi (3)-ni qaraylik va quyidagicha belgilashlar kiritaylik:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - tizimning matritsasi,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - noma`lumlar ustuni,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - ozod hadlar ustuni. U holda (3) tizimni matritsaviy tenglama ko`rinishida quyidagicha yozish mumkin:

AX = V. (5)

Faraz qilaylik A - xosmas matritsa bo`lsin, u holda unga teskari $A^{-1}$ matritsa mavjud bo`ladi. (5) tenglamaning har ikki tomonini A^{-1} ga chapdan ko`paytiraylik.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Ma`lumki $A^{-1}A = E,$ u holda $EX = A^{-1}B$, $EX = X$ ekanligidan $X = A^{-1}B.$

Shunday qilib, (5) – matritsaviy tenglamaning yechimi, A matritsaga teskari matritsaning (3) tizimning ozod hadlaridan iborat ustun matritsa ko`paytmasiga teng ekan.

Misol. Tenglamalar tizimini teskari matritsa yordamida yeching.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}$$

Yechish: Tizimning matritsasini tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

ΔA = -51 ≠ 0, demak, tenglamalar tizimi yagona yechimga ega.

A-1 matritsani topamiz:

$$A_{11} = -11 \quad A_{21} = -25 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = 9 \quad A_{22} = -12 \quad A_{32} = 3$$

$$A_{13} = -13 \quad A_{23} = -11 \quad A_{33} = 7$$

U holda $A^{-1} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$

Agar $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ekanligini e`tiborga olsak, berilgan tenglamalar tizimi yechimi X = A-1V bo`lgan AX = V matritsaviy tenglamaga aylanadi.

Shunday qilib,

$$X = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ya`ni x = 3, u = 1, z = 1.

Mavzuga doir misol va masalalar

Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer va matritsa usulida yeching.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 18x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1 \\ -10x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -10x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 6x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 3 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 8x_1 - x_3 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ -7x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 1 \\ -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 0 \\ 3x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -1 \\ 13x_1 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ 8x_1 - 5x_2 + 11x_3 = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ -5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Quyidagi |A| determinantning a_{12} va a_{32} elementlari yig`indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

A) 5; B) 2; C) 7; D) – 6; E) 6.

2. Quyidagi |A| determinantning diagonal elementlari yig`indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{vmatrix}.$$

A) 14; B) 0; C) 20; D) –6; E) 4.

3. Quyidagi determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 14; B) –26; C) 26; D) –14; E) 0.

4. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

A) 0; B) –12; C) 12; D) 2; E) 3.

5. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A) x=7; B) x= –1; C) x=2; D) x=4; E) x=8 .

6. Tenglamani yeching: $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ x & -21 \end{vmatrix} = 1$

A) x_1=4; x_2=1 ; B) x_1=–2; x_2=3 ; C) x_1=1; x_2=–1 ;

D) tenglama yechimga ega emas; E) tenglama cheksiz ko`p yechimga ega.

7. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 1; B) 0; C) –2; D) 4; E) 12.

8. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A) 0; B) 12; C) 10; D) –10; E) –12.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. II tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2n+1 & n+3 \\ n-2 & 2n+3 \end{vmatrix}.$$

2. III tartibli determinant qiymatini toping:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ 2n-1 & n+3 & n-4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Laplas teoremasi yordamida IV tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 & n+3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

VEKTORLARNI QO`SHISH VA AYIRISH. VEKTORLARNI SONGA KO`PAYTIRISH

VEKTORLARNI QO`SHISH VA AYIRISH. VEKTORLARNI SONGA KO`PAYTIRISH

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga Vektorlarni qo`shish va ayirish. Vektorlarni songa ko`paytirish bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

O`zlarining son qiymati va yo`nalishi bilan aniqlanadigan miqdorlar vektorlar deb ataladi. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar mos ravishda $\overline{a}$ vektorning boshi va oxiri bo`lsin. U holda $\overline{a}$ vektorning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi.

$$\overline{a} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$\overline{a}$ vektorning uzunligiga teng bo`lgan son uning moduli deyiladi va quyidagicha aniqlanadi.

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Agar $\overline{a}$ vektor koordinata o`qlari bilan mos ravishda $\alpha, \beta$ va $\gamma$ burchaklar hosil qilsa, u holda $\cos\alpha, \cos\beta$ va $\cos\gamma$, $\overline{a}$ vektorning yo`naltiruvchi kosinuslari deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\left|\overline{\alpha}\right|};\ \cos\beta = \frac{Y}{\left|\overline{\alpha}\right|};\ \cos\gamma = \frac{Z}{\left|\overline{\alpha}\right|}$$

Bu yerda: $X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$

Vektorning o`qqa proyeksiyasi

$\overline{a}$ vektorning U o`qqa proyeksiyasi, uning moduli va U o`q bilan tashkil qilgan burchagi φ orqali quyidagicha aniqlanadi. $np_U\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\varphi$

Ixtiyoriy $\overline{a}$ vektorning berilgan koordinatalar sistemasiga proyeksiyasini X,Y,Z orqali belgilaylik. U holda $\overline{a} = \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ va $\left|\overline{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\right|$ bo`ladi.

Misol. $\overline{a}$ =(6;3;-2) vektorning modulini toping.

Yechish: Modulni topish formulasiga asosan

$$\overline{a} = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

Misol. A(3;-1;2) va V(-1;2;1) nuqtalar berilgan. $\overline{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: $\overline{AB}$ vektorning koordinatalarini topish uchun mos ravishda V nuqtaning koordinatalaridan A nuqtaning koordinatalarini ayiramiz.

$$\overline{AB} = (-1-3; 2-(-1); 1-2) = (-4; 3; -1)$$

Misol. $\overline{a} = (12; -15; -16)$ vektorning yo`naltiruvchi kosinuslarini aniqlang.

Yechish: $\overline{a} = \sqrt{(12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 225 + 256} = 25$

Endi x=12; y=-15; z=-16 ekanligini e`tiborga olib yo`naltiruvchi kosinuslarni aniqlaymiz.

$$\cos\alpha = \frac{12}{25};\ \cos\beta = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5};\ \cos\gamma = -\frac{16}{25}$$

Vektorlar ustida amallar
Vektorlarni qo`shish va ayirish

Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar koordinatalari berilgan bo`lsa, ya`ni $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ u holda

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$
$$\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

Vektorlarni songa ko`paytirish

Agar $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ bo`lsa, u holda har qanday a son uchun quyidagi formula o`rinli $\alpha\bar{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Vektorlarning kolleniarlik sharti. Bir to`g`ri chiziqda yoki parallel to`g`ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar kolleniar vektorlar deb ataladi.

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning kolleniarlik sharti quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Vektorlarni bazis koordinatalari bo`yicha yoyish. $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ uchlik vektorlar bazis koordinatalari deyiladi, agar quyidagi uchta shart bajarilsa,

1) $\bar{i}$ vektor OX o`qida, $\bar{j}$ vektor OY o`qida, $\bar{k}$ vektor OZ o`qida yotadi.

2) har bir $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ vektorlar o`z o`qlarida musbat tomonga yo`nalgan bo`ladi.

3) $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ vektorlar, birlik vektorlar, ya`ni $|\bar{i}| = 1$; $|\bar{j}| = 1$, $|\bar{k}| = 1$

$\bar{a}$ vektor qanday bo`lishidan qat`iy nazar uni har doim $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ bazislar bo`yicha yoyish mumkin, ya`ni $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$

Bu yerda x_1, y_1, z_1 - $\bar{a}$ vektorning koordinatalari.

Misol. $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ va $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$ vektorlar berilgan 2$\bar{a}$ +3$\bar{b}$ vektorlar yig`indisini toping.

Yechish: $\bar{a}$ koordinatalari , $\bar{a} = (1;3;-2)$ xuddi shuningdek $\bar{b} = (2;1;4)$. Endi 2$\bar{a}$ va 3$\bar{b}$ vektorlarni aniqlaymiz.

2$\bar{a}$ =(2; 6; -2); 3$\bar{b}$ =(6; 3; 12)

Demak, 2$\bar{a}$ +3$\bar{b}$ =(2+6; 6+3; -2+12) =(8; 9; 10).

Misol. $\bar{a} = (4, 2, 0)$ vektorni $\bar{p} = (1, -1, 2), \bar{q} = (2, 2, -1)$ va $\bar{r} = (3, 7, -7)$ vektorlar bo`yicha yoying.

Yechish: $\overline{a}$ vektorni $\overline{p}, \overline{q}$ va $\overline{r}$ vektorlar bo`yicha yoyish, $\overline{a}$ vektorni chiziqli kombinatsiya ko`rinishida ifodalash demakdir.

$$\overline{a} = c_1\overline{p} + c_2\overline{q} + c_3\overline{r},$$

bu yerda c_1, c_2 va c_3 - topilishi kerak bo`lgan sonlar.

Koordinata ko`rinishida bu quyidagicha bo`ladi.

$$4i + 2j + 0 \cdot k = (c_1 + 2c_2 + 3c_3)i + (-c_1 + 2c_2 + 7c_3)j + (2c_1 - c_2 - 7c_3)k$$

Natijada quyidagi tenglamalar tizimini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 4 \\ -c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 2 \\ 2c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \end{cases}$$

Buni yechib, $c_1 = 3; c_2 = -1; c_3 = 1$ ekanligini topamiz. Demak, $\overline{a} = 3\overline{p} - \overline{q} + \overline{r}$.

Misol. $\overline{a} = (6; -2; -3)$ vektorning birlik vektorini toping.

Yechish: Birlik vektorni quyidagicha yozish mumkin.

$$\overline{a^0} = \overline{i}\cos\alpha + \overline{j}\cos\beta + \overline{k}\cos\gamma$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ larni topamiz

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a_x}}{|\overline{a}|}; \ \cos\beta = \frac{\overline{a_y}}{|\overline{a}|}; \ \cos\gamma = \frac{\overline{a_z}}{|\overline{a}|}$$

$$|\overline{\alpha}| = \sqrt{(6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Bundan $\cos\alpha$=6/7; $\cos\beta$=-2/7; $\cos\gamma$=-3/7.

Demak, $\overline{a^0} = (\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7})$.

Vektorlarni qo'shish va ayirish

Agar A, B, C ixtiyoriy nuqtalar bo`lsa, u holda $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC}$ bo'ladi.

Vektorlarini qo'shish:

1-usul. Uchburchak usuli (yohud uch nuqta qoidasi). Birinchi vektorning tugash nuqtasiga ikkinchi vektorning boshlang'ich nuqtasi ko'chiramiz va birinchi vektorning boshi bilan ikkinchi vektorning tugash nuqtalarini to'g'ri chiziq bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan vektor $\vec{a} + \vec{b}$ teng bo'ladi.

2-usul. Parallelogramm usuli. Ikkala vektorning boshlarini bir nuqtadan o'tkazib ularni parallel chiziqlar yordamida parallelogrammgacha to'ldirsak, shu parallelogramning diagonali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarining yig'indisi bo'ladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, uning $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorni beradi: $\vec{a} - \vec{b}$.

Songa ko'paytirish:

$\vec{b}$ (x; y; z) vektorning λ songa ko'paytmasi deb $\vec{b}$ (λx; λy; λz)ga aytiladi.

Skalar ko'paytma:

Nol bo'lmagan ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning skalar ko'paytmasi deb, bu vektorlar uzunliklarining ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga aytiladi:

$(\vec{a}\ \vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, bunda φ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

ABC uchburchak medianalari kesishgan O(x,y,z) nuqta koordinatasi:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

Mavzuga doir misol va masalalar

1. Berilgan $\bar{a}=(2;-1;-2)$ va $\bar{b}=(8;-4;0)$ vektorlar bo`yicha quyidagilarni toping:

a) $\bar{c}=2a$ va $\bar{d}=\bar{b}-\bar{a}$; b) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini;

c) $\bar{d}$ vektorning skalyar kvadratini;

d) $(\bar{c},\bar{d})$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini

e) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlar orasidagi burchakni

2. Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlar modullarini, ularning chiziqli kombinasiyasi $\bar{c}$ vektor koordinatalarini va uzunligini, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini, ular orasidagi burchak kattaligini, o`zaro ortogonalligini aniqlang:

$$\bar{a}=\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \bar{b}=(-1,\ 2,\ -2),\ \bar{c}=3\sqrt{2}\,\bar{a}-\bar{b}.$$

3. $\bar{a}=(2;1;-1)$ vektorga kolleniar va $(\bar{a},\bar{b})$ = 3 shartni qanoatlantiruvchi $\bar{b}$ vektorni toping.

4. $a=(5;\ 2;\ 5)$ vektorning $b=(2;-1;\ 2)$ vektor o`qidagi proyeksiyasini toping.

5. Agar $\bar{a}+2\bar{b}$ va $5\bar{a}-4\bar{b}$ vektorlar o`zaro perpendikulyar bo`lsa, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ birlik vektorlar orasidagi burchakni toping.

6. Quyidagi $b=(8;-3;-10;10)$ vektorni

$a_1=(1;\ 0;\ 4;\ 3)$; $a_2=(-2;\ 3;\ 1;4)$; $a_3=(1;\ 1;-4;\ 5)$;

$a_4=(1;-2;\ 0;\ 3)$ vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi ko`rinishida yoyish mumkin yoki yo`qligini tekshiring.

7. a = (5; 1; -2) va b = (1; 5; -2) vektorlar berilgan. $3\bar{a}-\bar{b}$ vektorning

a) $3\bar{a}-\bar{b}$ vektorning koordinata o`qlarida hosil qilgan proeksiyalarini;

b) uzunligini;

c) yo`naltiruvchi kosinuslarini toping.

8. Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlar modullarini, ularning chiziqli kombinasiyasi $\bar{c}$ vektor koordinatalarini va uzunligini, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini, ular orasidagi burchak kattaligini, o`zaro ortogonalligini aniqlang:

a) $\bar{a}=(0,\ 0,\ -1,\ 1)$, $\bar{b}=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ $\bar{c}=2\bar{a}+\bar{b}$.

b) $\bar{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\bar{b}=(-5,\ 3,\ 2)$, $\bar{c}=-4\bar{a}+3\bar{b}$.

9. $\bar{a}=2\bar{m}+4\bar{n}$ va $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$ vektorlar berilgan, bu yerda $\bar{m}$ *va* $\bar{n}$ birlik vektorlar, ular orasidagi burchak 120°. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

10. Tekislikda uchta $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlar berilgan. Ma`lumki $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3,\ |\overline{c}| = 3$ $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^\circ$, $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^\circ$, $\overline{d} = -\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ vektorning uzunligini toping.

11. α va β ning qanday qiymatlarida $\overline{a} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$ va $\overline{b} = \alpha\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}$ vektorlar

a) kolleniar, b) ortogonal.

12. $\overline{OA}$ vektor OX, OY va OZ o`qlari bilan mos ravishda $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ burchaklar hosil qiladi. Agar $B\left(2;\ 2;\ -2\sqrt{2}\right)$ bo`lsa, $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ vektorlarning perpendikulyarligini isbotlang.

13. Uchta $\overline{a}(2;-2), \overline{b}(2;-1), \overline{c}(2;4)$ vektorlar berilgan. $\overline{p} = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$ vektorning koordinatalarini toping hamda a va b vektorlar bo`yicha yoying.

14. To`rtta vektor berilgan:

$\overline{a} = (2;\ 1;\ 0)$, $\overline{b} = (1;\ -1;\ 2)$, $\overline{c} = (2;\ 2;\ -1)$, $\overline{d} = (3,\ 7,\ -7)$. $\overline{a}$ vektorni $\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ vektorlar bo`yicha yoying.

15. $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 6\overline{k}$ vektorning uzunligini va yo`naltiruvchi kosinuslarini toping.

16. m ning qanday qiymatlarida $\overline{a} = m\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ va $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - m\overline{k}$ vektorlar o`zaro perpendikulyar bo`ladi.

17. $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ vektorning $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$ vektor yo`nalishidagi proyeksiyasini toping.

18. $\overline{a} = 3\overline{i} - 6\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k}$ va $\overline{c} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$ vektorlar berilgan. $\overline{a} + \overline{c}$ vektorni $\overline{b} + \overline{c}$ vektorga proyeksiyasini toping.

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Skalyar deb nimaga aytiladi?
A) Faqat yo`nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo`nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
D) Yo`nalgan kesmaga skalyar deb aytiladi.
E) Har qanday kattalik skalyar deyiladi.

2. Vektor kattalik deb nimaga aytiladi?
A) Faqat yo`nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo`nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
D) Har qanday kesmaga vektor deb aytiladi.
E) Har qanday kattalik vektor deyiladi.

3. Quyidagi kattaliiklardan qaysi biri vektor bo`ladi ?
A) sirt yuzasi;
B) jism hajmi;
C) kesma uzunligi;
D) kuch;
E) Birorta ham kattalik vektor bo`lmaydi.

4. Qachon vektorlar kollinear deb aytiladi ?
A) Bir xil yo`nalgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
B) Har qanday a va b vektorlar kollinear vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo`nalgan va uzunliklari teng bo`lgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
D) Bitta to`g`ri chiziqda yoki parallel to`g`ri chiziqlarda yotuvchi a va b vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.
E) Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi a va b vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

5. Qachon vektorlar teng deb aytiladi ?
A) Bir xil yo`nalgan vektorlar teng deb aytiladi.
B) Bir xil uzunlikli a va b vektorlarga teng vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo`nalgan va uzunliklari teng bo`lgan vektorlar teng deb aytiladi.
D) a va b vektorlar kollinear, bir xil yo`nalgan va uzunliklari teng bo`lsa, ular teng vektorlar deb aytiladi.
E) Kollinear va bir xil yo`nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

6. Ta`rifni to`ldiring: Uchta vektor komplanar deyiladi, agar ular ⋯ joylashgan bo`lsa.
A) bitta to`g`ri chiziqda ;
B) bitta tekislik yoki parallel tekisliklarda ;
C) parallel to`g`ri chiziqlarda ;
D) o`zaro perpendikulyar to`g`ri chiziqlarda ;
E) o`zaro perpendikulyar tekisliklarda.

7. Fazodagi ort vektorlar qanday aniqlanadi?

A) OX, OY, OZ koordinata o`qlarida joylashgan, musbat yo`nalishda ega va uzunliklari birga teng bo`lgan vektorlar;

B) Uzunliklari birga teng bo`lgan uchta vektor;

C) O`zaro perpendikulyar bo`lgan uchta vektor;

D) O`zaro kollinear bo`lgan uchta birlik vektor;

E) Uchta komplanar birlik vektorlar.

8. a=(2, –5) vektorning $\bar{i}$ va $\bar{j}$ ortlar bo`yicha yoyilmasi qayerda to`g`ri ko`rsatilgan ?

A) a=2i–5j ;

B) a= –5i+2j ;

C) a= –2i+5j ;

D) a=5i–2j ; E) a=2i+5j .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Boshi A(n, 2n+3, 5–2n), uchi esa B(2n+3, 2n–1, n) nuqtada joylashgan a vektorning koordinatalarini toping.
2. Berilgan a=(n–2, n+3, n–1) va b=(n, n–4, n+2) vektorlar bo`yicha na, a+b, a–b va 3a+nb vektorlarni toping.
3. Boshi A(n–2, n+3, n) va uchi B(n+1, n–3, n–1) nuqtada joylashgan vektorning koordinatalarini toping.
4. Uchlari A(n–2, n+3, n) va B(n+1, n–3, n–1) nuqtalarda joylashgan AB kesmani λ=(n–1):(n+2) nisbatda bo`luvchi C(x,y,z) nuqta koordinatalarini aniqlang.

IKKI VEKTORNING SKALYAR KO`PAYTMASINI TOPISH

IKKI VEKTORNING SKALYAR KO`PAYTMASINI TOPISH

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga Ikki vektorning skalyar ko`paytmasini topishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi deb, bu vektorlar uzunliklari ko`paytmasi bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko`paytmasiga aytiladi va ($\bar{a}$,$\bar{b}$) shaklda belgilanadi.

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$$

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini quyidagicha ham yozish mumkin.

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b} \text{ yoki } (\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$$

Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo`lsa, ya`ni $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$, u holda ularning skalyar ko`paytmasi quyidagi formula bilan hisoblanadi. $(\bar{a},\bar{b})=(x_1\cdot x_2;y_1\cdot y_2;z_1\cdot z_2)$

Bundan vektorlarning perpendikulyarlik sharti kelib chiqadi, ya`ni $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$

Koordinatalari bilan berilgan $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar orasidagi f burchak quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

Yoki koordinatalar shaklida

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Misol. Agar $\bar{p}=\bar{a}-\bar{b};\bar{q}=\bar{a}+2\bar{b};|\bar{a}|=1;|\bar{b}|=3;(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})=\frac{2}{3}\pi$ bo`lsa, $\bar{p}+2\bar{q}$ vektorning uzunligini toping.

Yechish: Vektorning moduli ta`rifiga ko`ra: $|\bar{p}+2\bar{q}|=\sqrt{(\bar{p}+2\bar{q})^2}$. ($\bar{p}+2\bar{q}$)2 ni hisoblaymiz.

$$(\bar{p}+2\bar{q})^2=(\bar{a}-\bar{b}+2\bar{a}+4\bar{b})^2=$$

$$9(\overline{a^2}+2\overline{ab}+\overline{b^2})=9(1+2\cdot3\cos\frac{2}{3}\pi+9)=63$$

Bundan $|\bar{p}+2\bar{q}|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$.

Misol. $\bar{x}=(2,1,-2)$ vektorga kollinear va $(\bar{x}\cdot\bar{a})=27$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{a}$ vektorni toping.

Yechish: Kollinearlik shartidan foydalanib $\bar{a}$ vektorni quyidagicha yozish mumkin. $\bar{a} = \lambda \bar{x}$, bu yerda λ - noma`lum ko`paytuvchi. $\bar{a}$ vektorni topish uchun quyidagi shartdan foydalanamiz: $(\bar{x}\bar{a}) = \lambda \bar{a}^2 = \lambda(4+1+4) = 9\lambda = 27$.

Bundan $\lambda = 3$ va $\bar{x} = 3\bar{a} = (6,3,-6)$.

Misol. Agar $\bar{a}$=(1,-3,4) , $\bar{b}$=(3,-4,2) va $\bar{c}$ =(-1,1,4) bo`lsa, $\bar{a}$ vektorning $\bar{b}+\bar{c}$ vektorga proyeksiyasini hisoblang.

Yechish: Quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$\Pi p_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a} = \frac{\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})}{\left|\bar{b}+\bar{c}\right|}$$

$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})$ va $\bar{b}+\bar{c}$ ifodalarni hisoblaymiz.

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = 1(3-1) - 3(-4+1) + 4(2+4) = 35$$

$$\left|\bar{b}+\bar{c}\right| = \sqrt{(3-1)^2 + (-4+1)^2 + (2+4)^2} = 7$$

Bundan $\Pi p_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a} = 5$

Ikki vektorning vektor ko`paytmasi

Ikki $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorning vektor ko`paytmasi deb shunday $\bar{c}$ vektorga aytiladki, bu vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga pernpendikulyar bo`lib, uning moduli $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuziga teng, yo`nalishi esa $\bar{c}$ uchidan qaraganda $\bar{c}$ vektor atrofida $\bar{a}$ vektordan $\bar{b}$ vektorga eng kichik burchak bilan aylanishi soat strelkasiga teskari bo`lishi kerak.

$\bar{a}$ vektor bilan va $\bar{b}$ vektorning vektor ko`paytmasi $\bar{a}\times\bar{b}$ yoki $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ shaklida yoziladi va quyidagicha belgilanadi.

$\bar{c}$ =$\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$. Bu vektor uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuziga teng; ya`ni

$$\bar{c} = \left|\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\right| = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$$

Vektor ko`paytmaning xossalari:

1. Vektor ko`paytmadagi ko`paytuvchilar o`rnini almashtirsa, vektor ko`paytma (-1) ga ko`payadi.

$$\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right] = -\left[\bar{b}\cdot\bar{a}\right]$$

2. Skalyar ko`paytuvchiga nisbatan vektor ko`paytma gruppalash qonuniga bo`ysunadi, ya`ni:

$$\left[\lambda a, b\right] = \left[\bar{a}, \lambda\bar{b}\right] = \lambda\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$$

Proyeksiyalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko`paytmasi.

$\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar berilgan bo`lsin. Bu vektorlarning vektor ko`paytmasi quyidagicha bo`ladi.

$$\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Bu tenglamadan $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ vektor ko`paytmani tasvirlovchi vektorlarning koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari

$$y_1z_2 - z_1y_2;\ \ z_1x_2 - x_1z_2;\ \ x_1y_2 - y_1x_2;$$

bo`lishini ko`ramiz.

Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kolliyenar(bir-biriga parallel) bo`lsa, ularning mos proyeksiyalari proporsional bo`ladi, ya`ni $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Misol. Agar A (1,1,1), V (2,0,1) va S (1,2,-1) bo`lsa, AVS uchburchakning yuzini hisoblang.

Yechish: Vektor ko`paytmaning moduli son jihatdan, tomonlari shu vektorlardan qurilgan uchburchak yuzining ikkilanganiga teng:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right|$$

$\bar{a} = \overline{AB} = (-1,1,0)$ va $\bar{b} = \bar{A}\bar{C} = (0,1,-2)$ vektorlarni kiritamiz.

Bu vektorlarning vektor ko`paytmasi.

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$$

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Bundan S=1,5 kv.bir.

Misol. Agar $|\bar{x}| = \sqrt{6}$ bo`lsa, $\bar{a} = (1,1,1)$ va $\bar{b} = (2,0,1)$ vektorlarga perpendikulyar va OX o`qi bilan o`tmas burchak hosil qiluvchi $\bar{x}$ vektorni va $\bar{c} = \left[\bar{a}\bar{b}\right]$ vektorni toping.

Yechish: $\bar{c}$ vektorni kiritamiz

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$$

$\bar{x}$ vektor $\bar{a}$ i $\bar{b}$ vektorlarga perpendikulyar bo`lsa, u holda $\bar{c}$ vektorga kollinear bo`ladi. Bundan kelib chiqadiki, $\bar{x} = \lambda\bar{c} = (\lambda, \lambda, -2\lambda)$

$$|\bar{x}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6}\lambda = \sqrt{6} \to \sqrt{\lambda} = \pm 1$$

$\bar{x}$ vektor OX o`q bilan o`tmas burchak tashkil qiladi, shuning uchun uning OX o`qdagi proyeksiyasi manfiy bo`lishi kerak. Bundan $\lambda = -1$ va $\bar{x} = -c = (-1,-1,2)$

Misol. B (5,1,0) nuqtaga qo`yilgan $\bar{F} = (1,-1,1)$ kuch vektorining yo`naltiruvchi kosinuslarini va shu kuchning A(3,2,-1) nuqtaga nisbatan momentini toping.

Yechish: kuch vektorining yo`naltiruvchi kosinuslarini topamiz.

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\bar{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos\beta = \frac{F_y}{|\bar{F}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{|\bar{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kuch momenti $\overline{AB} = (2,-1,1)$ va $\bar{F}$ vektorlarning vektor ko`paytmasi kabi aniqlanadi.

$$\overline{m}=\left[\overline{AB}\,\overline{F}\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\bar{j}-\bar{k}$$

ya`ni $\overline{m}=(0,-1,-1)$.

Uch vektorning aralash ko`paytmasi

Uchta $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ vektorlar berilgan bo`lsin. $\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]$ vektor ko`paytma bilan $\overline{c}$ vektorni skalyar ko`paytirish aralash ko`paytma deyiladi va $[\overline{a}\cdot\overline{b}]\overline{c}$ yoki $\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}$ yoki $(\overline{a\times b\times c})$ ko`rinishda yoziladi.

Aralash ko`paytmaning xossalari.

1. Ko`paytmada ikki qo`shni vektor o`rni almashtirilsa, aralash ko`paytma ishorasini almashtiradi.

$$[\overline{a}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{c}=-[\overline{c}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{a}$$

$$[\overline{a}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{c}=-[\overline{a}\cdot\overline{c}]\cdot\overline{b} \text{ va h.k.}$$

2. Agar $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ vektorlardan istalgan ikkitasi bir-biriga teng yoki parallel (kolliyenar) bo`lsa, ularning aralash ko`paytmasi nolga teng, xususiy holda

$[\overline{a}\cdot\overline{a}]\cdot\overline{c}=[\overline{a}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{a}=[\overline{b}\cdot\overline{a}]\cdot\overline{a}=0$

3.Agar $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ vektorlar komplanar (bir tekislikda yotuvchi) vektorlar bo`lsa, ularning aralash ko`paytmasi nolga teng.

Proyeksiyalari bilan berilgan vektorlarning aralash ko`paytmasi.

$\overline{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{b}(x_2,y_2,z_2)$ va $\overline{c}(x_3,y_3,z_3)$ vektorlar berilgan bo`lsin. Bu vektorlarning vektor ko`paytmasi quyidagicha bo`ladi.

$$\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ vektorlar komplanar bo`lishining zaruriy va yetarli sharti.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

Tenglik bajarilishi bilan ifodalanadi.

Misol. Agar A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7) va D(-5,-4,8) nuqtalar piramidaning uchlari bo`lsa, D uchidan AVS yoqqa tushirilgan balandlikning uzunligini toping.

Yechish: $\overline{AB}=(2,-2,-3)$; $\overline{AC}=(4,0,6)$; va $\overline{AD}=(-7,-7,\ 7)$.

Vektorlarni topamiz. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ va $\overline{AD}$ vektorlarga qurilgan piramidaning hajmi, shu vektorlar aralash ko`paytmasi modulining oltidan bir qismiga teng.

$$V=\frac{1}{6}\left|\ \overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\ \right| \text{ va } V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$$

Bu yerda $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right|$ bundan $h=\dfrac{\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|}{\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right|}$

Quyidagilarni hisoblaymiz

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} -7 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=308$$

$$[\overline{AB}\cdot\overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12i + 24\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 28$$

Bu yerdan $h = \dfrac{308}{28} = 11$

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi ($\bar{a}$, $\bar{b}$) deb

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cdot\cos\varphi$$

songa aytiladi. $\bar{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $\bar{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar kvadrati, $(\bar{a}, \bar{a}) = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ yoki $|a| = \sqrt{\bar{a}^2}$

Misol. Piramida ucharining koordinatalari berilgan $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$.

Quyidagilarni topish talab etiladi:

1) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlarni va ularni modullarini $|\overline{AB}|, |\overline{AC}|$;

2) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlar orasidagi <A burchakni;

3) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini;

4) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlarning vektorli ko`paytmasining modulini.

5) C nuqtadan o`tib, $\overline{AB}$ vektorga perpendikulyar bo`lgan, Q tekislik tenglamasini tuzish.

Yechish: 1) $\overline{AB},\quad \overline{AC},\quad \overline{AD}$ vektorlarni va ularni modellarini topamiz. Vektorlarga doir yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanamiz. Ma`lumki, ixtiyoriy vektorni $a_x,\ \ a_y,\ \ a_z$ o`qdagi proeksiyalari hamda birlik $\bar{i},\ \ \bar{j},\ \ \bar{k}$ vektrlari (ortlari) yordamida yagona usul bilan yoyib yozish mumkin.

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},\quad \overline{AB} = (2-0)\bar{i} + (3-0)\bar{j} + (5-1)\bar{k} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k},$$

$$\overline{AC} = (6-0)\bar{i} + (2-0)\bar{j} + (3-1)\bar{k} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k},$$

$$\overline{AD} = (3-0)\bar{i} + (7-0)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = 3\bar{i} + 7\bar{j} + \bar{k}.$$

Bu vektorlarni modullari $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ formulaga asosan

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29},\quad |\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11},$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{59}.$$

2) $\overline{AB}$ va $\overline{AC}$ vektorlar orasidagi φ burchakni hisoblaymiz.

$$Cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{2\cdot 6 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2}{\sqrt{29}\cdot 2\sqrt{11}} = \frac{13}{\sqrt{319}} \approx 0{,}728$$

Bradis jadvalidan $\varphi \approx 43^\circ$.

3) $\overline{AD}$ vektorni $\overline{AB}$ vektordagi proeksiyasi

$$np_{\overline{AB}}AD = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 7 + 4\cdot 1}{\sqrt{29}} \approx \frac{31}{5{,}39}$$

4) Piramidaning ABC tomoni, uchburchak yuzasini hisoblaymiz

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}\times\bar{в}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Bu erda ikki vektorni ko`paytmasi

$$\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 20\bar{j} - 14k$$

$$\left|\left[\overline{AB}\times AC\right]\right| = \sqrt{(-2)^2 + 20^2 + (-14)^2} = \sqrt{4+400+196} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6},$$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$ kvadrat birlik.

5) Piramidaning xajmini uchta komplanar bo`lmagan $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ vektorlarni aralash ko`paytmasiga asosan hisoblaymiz:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\bar{a}\times\bar{в}\right]\cdot\bar{c}\right| = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 120 = 20 \text{ kub birlik.}$$

Mavzuga doir misol va masalalar

1. $\bar{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $\bar{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a||b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}$$

formula orqali aniqlanadi.

2. Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlar modullarini, ularning chiziqli kombinasiyasi $\bar{c}$ vektor koordinatalarini va uzunligini, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini, ular orasidagi burchak kattaligini, o`zaro ortogonalligini aniqlang:

a) $\bar{a} = (0,\ 0,\ -1,\ 1)$, $\bar{b} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$ $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$.

b) $\bar{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\bar{b} = (-5,\ 3,\ 2)$, $\bar{c} = -4\bar{a} + 3\bar{b}$.

3. $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$ va $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$ vektorlar berilgan, bu yerda $\bar{m}$ *va* $\bar{n}$ birlik vektorlar, ular orasidagi burchak 120°. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

4. Tekislikda uchta $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar berilgan. Ma`lumki $|\bar{a}| = 2,\ |\bar{b}| = 3,\ |\bar{c}| = 3$ $\left(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}\right) = 60^{\circ}$, $\left(\widehat{\bar{b}\,\bar{c}}\right) = 60^{\circ}$, $\bar{d} = -\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ vektorning uzunligini toping.

5. α va β ning qanday qiymatlarida $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ va $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ vektorlar

a) kolleniar, b) ortogonal.

6. $\overline{OA}$ vektor OX, OY va OZ o`qlari bilan mos ravishda $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ burchaklar hosil qiladi. Agar $B\left(2;\ 2;\ -2\sqrt{2}\right)$ bo`lsa, $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ vektorlarning perpendikulyarligini isbotlang.

7. Uchta $\bar{a}(2;\ -2)$, $\bar{b}(2;\ -1)$, $\bar{c}(2;\ 4)$ vektorlar berilgan. $\bar{p} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ vektorning koordinatalarini toping hamda a va b vektorlar bo`yicha yoying.

8. To`rtta vektor berilgan:

$\overline{a}=(2;\ 1;\ 0)$, $\overline{b}=(1;-1;\ 2)$, $\overline{c}=(2;\ 2;-1)$, $\overline{d}=(3,\ 7,-7)$. $\overline{a}$ vektorni $\overline{b},\overline{c},\overline{d}$ vektorlar bo`yicha yoying.

9. $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-6\overline{k}$ vektorning uzunligini va yo`naltiruvchi kosinuslarini toping.

10. m ning qanday qiymatlarida $\overline{a}=m\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$ va $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-m\overline{k}$ vektorlar o`zaro perpendikulyar bo`ladi.

11. $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$ vektorning $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$ vektor yo`nalishidagi proyeksiyasini toping.

12. $\overline{a}=3\overline{i}-6\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+4\overline{j}-5\overline{k}$ va $\overline{c}=3\overline{i}+4\overline{j}+2\overline{k}$ vektorlar berilgan. $\overline{a}+\overline{c}$ vektorni $\overline{b}+\overline{c}$ vektorga proyeksiyasini toping.

13. Tekislikda $A(0;\ -2)$, $B(4;\ 2)$ va $C(4;\ -2)$ nuqtalar berilgan. Koordinatalar boshidan $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ va $\overline{OC}$ kuchlar qo`yilagan. Ularning teng ta`sir etuvchisi $\overline{OM}$ yasalsin va uning o`qlardagi proeksiyalari hamda uzunligi topilsin. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ va $\overline{OM}$ kuchlar i va j birlik vektorlar orqali ifodalansin.

14. Uchta komplanar $\overline{m}$, $\overline{n}$ va $\overline{p}$ birlik vektor berilgan, $\overline{m},\wedge\overline{n}=30^0$ va $(\overline{n}p)=60^0$ $u=m+2n-3p$ vektor yasalib uning moduli hisoblansin.

15. Uchta komplanar bo`lmagan $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$ , $\overline{OC}=c$ vektorlarda parallelepiped yasalgan. Uning mos ravishda $a+b-c$, $a-b+c$, $a-b-c$ va $b-a-c$ larga teng vektor – diagonallari ko`rsatilsin.

16. Tekislikda $A(3;\ 3)$, $B(-3;\ 3)$ va $C(-3;\ 0)$ nuqtalar berilgan, koordinatalar boshidan $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ va $\overline{OC}$ kuchlar qo`yilgan. Ularning teng ta`sir etuvchisi $\overline{OM}$ yasalsin va uning o`qlardagi proeksiyalari hamda kattaligi topilsin. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ , $\overline{OC}$ va $\overline{OM}$ vektorlar o`qlardagi i va j birlik vektorlar orqali ifodalansin.

17. $M(5;\ -3;\ 4)$ nuqta yasalsin va uning radiusi-vektorining uzunligi hamda yo`nalishi aniqlansin.

18. $r=\overline{OM}=2i+6k$ vektor yasalsin va uning radius- vektorining uzunligi hamda yo`nalishi aniqlansin ($cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ formula bo`yicha tekshirilsin.)

19. $A(1;\ 2;\ 3)$ va $B(3;\ -4;\ 6)$ nuqtalar berilgan. $u=\overline{AB}$ vektor va uning koordinata o`qlaridagi proeksiyalari yasalsin hamda uning uzunligi va yo`nalishi aniqlansin. u vektorning koordinata o`qlari bilan tashkil etgan burchaklari yasalsin.

20. $A(2;\ 1;\ -1)$ nuqtaga $R=7$ kuch qo`yilgan. Bu kuchning ikki koordinatasi $X=2$ va $Y=-3;$ o`sha kuchni ifodalovchi vektorning yo`nalishi va oxirgi nuqtasi aniqlansin.

21. Paralelgrammning ketma-ket uchta $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 1)$ va $C(6;\ 4;\ 4)$ uchlari berilgan. Uning to`rtinchi uchi D topilsin.

22. $a=-i+j$ va $b=i-2j+2k$ vektorlar orasidagi burchak aniqlansin.

23. Uchlari $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ va $C(0;\ 0;\ 5)$ nuqtalarda bo`lgan $\Delta\ ABC$ ning burchaklari aniqlansin.

24. $a=2i+j$ va $b=-2j+k$ vektorlarda yasalgan parallelgramm diagonallari orasidagi burchak topilsin.

25. $a=i+j+2k$ va $b=i-j+4k$ vektorlar berilgan. $\text{пр}_a b$ aniqlansin.

26. 1) Agar m va n o`zaro 30o burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo`lsa, $(m+n)^2$ hisoblansin; 2) agar $a=2\sqrt{2}$ va $b=4$ hamda (a ,^ b)=135o bo`lsa, $(a-b)^2$ hisoblansin.

27. Agar m va n - oralaridagi burchagi 60o ga teng birlik vektorlar bo`lsa, $a=2m+n$ va $b=m-2n$ vektorlarda yasalgan parallelgramm diagonallarining uzunliklari aniqlansin.

28. $a = 2m - n$ vektor berilgan bo`lib, bunda m va n oralaridagi burchagi 120o ga teng birlik vektorlardir.

$cos\,(a\,,\hat{}\,m)$ va $cos\,(a\,,\hat{}\,n)$ topilsin.

29. $A(3;\ \ 3;\ \ -2)$, $B(0;\ \ -3;\ \ 4)$, $C(0;\ \ -3;\ \ 0)$ va $D(0;\ \ 2;\ \ -4)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB} = a$ va $\overrightarrow{CD} = b$ vetorlar yasalsin hamda $\text{пр}_a b$ topilsin.

30. Agar 1) $a = 3i;\ \ b = 2k$; 2) $a = i + j;\ \ b = i - j;$ 3) $a = 2i + 3j;\ \ b = 3j + 2k$ bo`lsa, $c = a \times b$ vektor aniqlansin va yasalsin. Har bir hol uchun berilgan vektorlarda yasalgan paralelgramm yuzi hisoblansin.

31. Ushbu

1) $i \times (j + k) - j \times (i + k) + k \times (i + j + k)$;

2) $(a + b + c) \times c + (a + b + c) \times b + (b - c) \times a$;

3) $(2a + b) \times (c - a) + (b + c) \times (a + b)$;

4) $2i \cdot (j \times k) + 3j \cdot (j \times k) + 4k(i \times j)$ ifodalar qavslarni ochib soddalashtirilsin.

32. $a = 3k - 2j$, $b = 3i - 2j$ va $c = a \times b$ vektorlar yasalsin. c vektorning moduli hamda a va b vektorlarda yasalgan uchburchak yuzi hisoblansin.

33. Fazoda $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar koordinatalari bilan berilgan. Quyidagilarni topish talab etiladi:

1) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlarni va ularni modullarini $|\overline{AB}|, |\overline{AC}|$;

2) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlar orasidagi <A burchakni;

3) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini;

4) $\overline{AB}, \overline{AC}$ vektorlarning vektorli ko`paytmasining modulini.

5) S nuqtadan o`tib, $\overline{AB}$ vektorga perpendikulyar bo`lgan, Q tekislik tenglamasini tuzish.

Mavzuga oid testlar to`plami

1. a va b vektorlarning skalyar ko`paytmasi qayerda to`g`ri ifodalangan ?
A) a·b= |a|·|b|; B) a·b=|a|·|b| cosϕ ; C) a·b=|a|·|b| sinϕ ;
D) a·b=|a|·|b| tgϕ ; E) a·b=|a|·|b| ctgϕ .

2. Qaysi holda a va b vektorlarning skalyar ko`paytmasi |a·b|=|a|·|b| satrni qanoatlantiradi?
A) a va b bir xil uzunlikka ega bo`lsa;
B) a va b ort vektorlar bo`lsa;
C) a va b orthogonal bo`lsa;
D) a va b kollinear bo`lsa;
E) hech qaysi a va b vektorlar uchun bu shart bajarilmaydi.

3. a va b vektorlarning skalyar ko`paytmasining xossasi qayerda noto`g`ri ifodalangan ?
A) a·b=b·a ; B) a·a=$|a|^2$; C) a·(b+ c)= a·b+ a·c ;
D) (λa,b)= (a, λb)= λ(a, b); E) Barcha xossalar to`g`ri.

4. i, j, k ort vektorlarning skalyar ko`paytmalari boyicha quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o`rinli emas ?
A) i·i=1 , i·j=0 , i·k=0 ; B) j·j=1 , j·i=0 , j·k=0 ; C) k·k=1 , k·i=0 ,k·j=0 ;
D) j·(i+ k)=0 , i· (k+j)=0 , k· (i+ j)=0 ;

E) j·(i+ k+j)=0 , i· (k+j+i)=0 , k· (i+ j+k)=0 ;

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Berilgan a=(n, n+1, n–2) va b=(n+2, n, n–1) vektorlar orasidagi ϕ burchakning kosinusini toping.
2. λ parametrning qanday qiymatida a=(λn, n–2, n+1) va b=(n–3, λn, n–1) vektorlar orthogonal bo`lishini aniqlang.
3. Fazodagi A(n+2, n+4, n–3) va B(2n+1, n+1, 2n–1) nuqtalar orasidagi masofani toping.

TO`G`RI CHIZIQNING BURCHAK KOEFFITSIYENTI

TO`G`RI CHIZIQNING BURCHAK KOEFFITSIYENTI

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentini aniqlashda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Chiziq va uning tenglamasi haqida. Analitik geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri, chiziq tenglamasi tushunchasidir. Tekislikda to`g`ri burchakli koordinatlar sistemasida L chiziq berilgan bo`lsin (7.1-shakl).

L chiziqda yotuvchi istalgan $M(x, y)$ nuqtaning koordinatlari

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

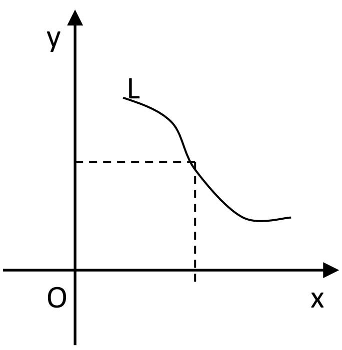
tenglamani qanoatlantirib, unda yotmagan nuqtalarning koordinatlari qanoatlantirmasa, bu tenglama L chiziqning tenglamasi deyiladi. Bundan L chiziq, koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to`plamidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Chiziqning tenglamasini tuzish deganda unga tegishli ixtiyoriy $M(x,\ y)$ nuqtaning koordinatlari orasidagi munosabatni(bog`lanishni) tenglama ko`rinishida ifodalashdan iborat. Topilgan chiziq tenglamasi uchun: chiziqdagi istalgan nuqtaning koordinatlari uni qanoatlantiradi va aksincha, nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantirsa, bu nuqta shu chiziqda yotadi.

To`g`ri chiziq va uning tenglamalari

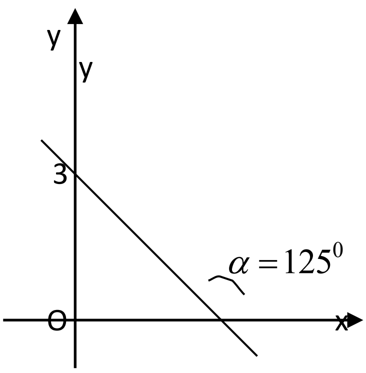
To`g`ri chiziq tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to`g`ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to`g`ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o`rganamiz.

To`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

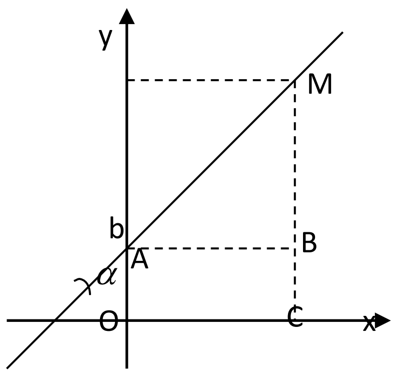
To`g`ri chiziqning OX o`qi musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to`g`ri chiziqning ordinatlar o`qidan ajratgan kesmasining kattaligi $b$ berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo`ladi. Masalan, $b = 3$, $\alpha = 125^0$ bo`lsa, uning holati aniq bo`ladi (7.2-shakl).



7.1-shakl



7.2-shakl



7.3-shakl

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to`g`ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to`g`ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo`lsin (7.3-shakl). $AMB$ to`g`ri burchakli uchburchakdan

$\frac{BM}{AB} = tg\alpha$, bundan $BM = ABtg\alpha$

7.3-shakldan $y = BC + BM$; yoki $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ bo`lganligi uchun $y = xtg\alpha + b$ bo`ladi. $tg\alpha$ to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deyiladi va $tg\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \quad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi. $b = 0$ bo`lsa, to`g`ri chiziq koordinatlar boshidan o`tib, tenglamasi $y = kx$ bo`ladi. $k = 1$ bo`lsa, $y = x$ bo`lib, bu birinchi koordinat- lar burchagining bissektrisasi bo`ladi.

Misol. OX o`qi bilan $120^0$ burchak hosil qiluvchi va $OY$ o`qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o`tuvchi to`g`ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish: Shartga ko`ra, to`g`ri chiziq $OY$ o`qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o`tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan $OX$ o`qiga parallel chiziq o`tkazamiz, hamda shu to`g`ri chiziq bilan $120^0$ burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo`lgan to`g`ri chiziq bo`ladi .

Endi shu to`g`ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo`lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}\ x\ + 3$ to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi bo`ladi.

Berilgan bitta nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziqlar dastasining tenglamasi

Berilgan ikki nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, x_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo`lsin.

$$y = kx + b \quad (3)$$

to`g`ri chiziq A nuqtadan o`tsin. Bu holda $A$ nuqtaning koordinatlari to`g`ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya`ni $y_1 = kx_1 + b$ bo`ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

hosil bo`ladi. (4) tenglamaga berilgan bitta nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziqlar dastasining tenglamasi deyiladi.

To`g`ri chiziq $B(x_2; y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o`tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo`lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo`ladi. $k$ ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo`yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) berilgan ikki $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi deyiladi.

Misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so`m xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so`m bo`lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to`g`ri chiziq) bo`lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

Yechish: Masala sharti bo`yicha $A(100,\ 300)$ va $B=(500,\ 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasiga asosan,

$\frac{y-300}{1300-300}=\frac{x-100}{500-100}$, yoki $y=2{,}5x+50$

tenglik o`rinli bo`ladi. Oxirgi tenglamadan $x=400$ uchun, $y=1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so`m xarajat qilinadi.

To`g`ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari

Ikki noma`lumli

$$Ax+By+C=0$$

tenglamani qaraymiz.

Bundan, $By=-Ax-C$, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ bo`lib, $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y=kx+b$ tenglama hosil bo`ladi. Shunday qilib, $Ax+By+C=0$ tenglama ham to`g`ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax+By+C=0 \quad (6)$$

tenglamaga to`g`ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

To`g`ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari:

1) $A\neq 0$, $B\neq 0, C=0$ bo`lsa, $Ax+By=0$ bo`lib, to`g`ri chiziq koordinatlar boshidan o`tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, bo`lsa, $y=-\frac{C}{B}$ bo`lib, OY o`qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, $OX$ o`qiga parallel to`g`ri chiziq tenlamasi bo`ladi;

3) $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ bo`lsa, $x=-\frac{C}{A}$ bo`lib, OX o`qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib , $OY$ o`qiga paralllel to`g`ri chiziq tenglamasi bo`ladi;

4) $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$ bo`lsa, $y=0$ bo`lib, OX o`qining tenglamasi hosil bo`ladi;

5) $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ bo`lsa, $x=0$ bo`lib, OY o`qining tenglamasi hosil bo`ladi;

6) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ bo`lsa, $C=0$ bo`lib, o`zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo`lishi mumkin emas.

Misol. $x-2y+6=0$ to`g`ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y=x+6,\quad y=1/2\cdot x+3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab $k=1/2$, $b=3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to`g`ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

To`g`ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi

To`g`ri chiziq koordinat o`qlaridan mos ravishda $a$ va $b$ kesmalar ajratib o`tsin (7.4-shakl). To`g`ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o`tadi. Berilgan ikki nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}\ ,\ \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}\ ,\ \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

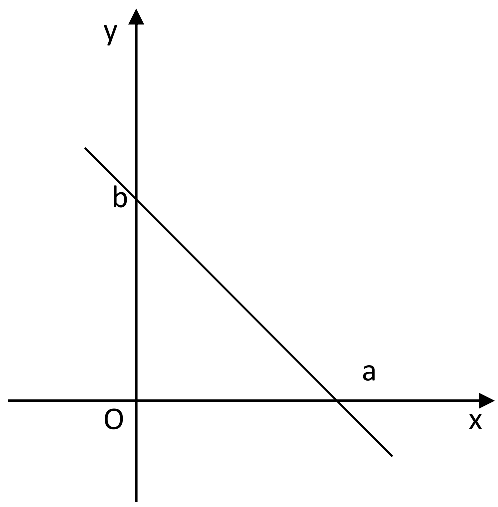
yoki $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (7) tenglama hosil bo`ladi. Bu tenglamaga to`g`ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi.

Misol. $3x+5y-15=0$ to`g`ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

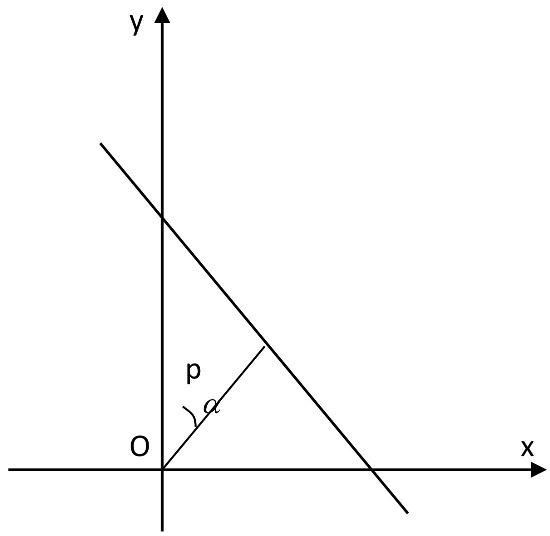
Yechish. $3x+5y-15=0$ to`g`ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko`rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x+5y=15,\quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1\qquad \text{ёки}\qquad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

bu to`g`ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo`ladi. Endi koordinat o`qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo`lgan to`g`ri chiziqni o`tkazamiz.



7.4-shakl



7.5-shakl

To`g`ri chiziqning normal tenglamasi

To`g`ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o`qi musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to`g`ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo`ladi (7.5-shakl) va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \quad (8)$$

bo`ladi. (8) tenglamaga to`g`ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi. Ma`lumki, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To`g`ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

normallovchi ko`paytuvchini hisoblab, uni

$$Ax+By+C=0$$

tenglamaga ko`paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

normal tenglama hosil bo`ladi. Normallovchi ko`paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

Misol. Normalning uzunligi $p=3$ va uning OX o`qi bilan hosil qilgan burchagi $30^0$ bo`lsa, to`g`ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish: Shartga ko`ra normal $OX$ o`qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo`zg`aluvchi tomoni normal to`g`ri chiziq bo`ladi. Shu to`g`ri chiziqda $p=3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to`g`ri chiziq o`tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo`lgan to`g`ri chiziq bo`ladi . Endi to`g`ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko`ra normalning uzunligi va uning $OX$ o`qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma`lumki, to`g`ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p=3$, $\alpha=30^0$ bo`lganligi uchun

$$x\cos30^0+y\sin30^0-3=0 \qquad ёки \qquad \sqrt{3}/2\cdot x+1/2\cdot y-3=0$$

Natijada $\sqrt{3}\,x+y-6=0$ tenglama hosil bo`ladi.

Misol. $4x-3y-5=0$ to`g`ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish: Normallovchi ko`paytuvchini topamiz: $M=\dfrac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{1}{5}$ bo`ladi.

Berilgan tenglamani $M=1/5$ ko`paytirib, $4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to`g`ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

$$(\frac{4}{5})^2+(-\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1,\ (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$$ edi.

Mavzuga doir misol va masalalar

1. OY o`qidan $b=4$ kesama ajratib $OX$ o`qi bilan 135^0 burchak tashkil etuvchi to`g`ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.
2. OY o`qidan $b=-2$ kesma ajratib $OX$ o`qi bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi to`g`ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

3. Koordinatlar boshidan o`tib, $OX$ o`qi bilan: 1). 45^0, 2). 120^0, 3). 60^0, 4). 90^0 burchak tashkil etuvchi to`g`ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.

4. 1) $3x+5y+15=0$; 2) $3x+2y=0$; 3) $y=-2$; 4) $x/4+y/4=1$ to`g`ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.

5. 1) $4x+3y-12=0$; 2) $4x+3y=0$; 3) $2x-7=0$; 4) $2y+7=0$ to`g`ri chiziqlarning kesmalarga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.

6. $A\,(2;3)$ nuqtadan o`tib, $OX$ o`qi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi to`g`ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

7. 1) $2x-3y-6=0$; 2) $3x-2y+4=0$ to`g`ri chiziq tenglamalarini, kesmalar bo`yicha tenglamasiga keltiring.

8. $Ax+5y-40=0$ to`g`ri chiziq A ning qanday qiymatlarida koordinat o`qlaridan bir xil kesmalar ajratadi.

9. Uchlari $A(3;\ 4)$, $B(3;\ 2)$ va $C(-1;\ 2)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

10. To`g`ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o`qi bilan $\alpha=45^0$ burchak hosil qilsa, to`g`ri chiziq tenglamasini yozing.

11. $x-y+3=0$ to`g`ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o`qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

12. Ushbu 1) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y-6=0$, 2) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}-7=0$

3) $\frac{3}{5}x+\frac{3}{4}y-2=0$, 4) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-4=0$ to`g`ri chiziq tenglamalaridan qaysilari normal ko`rinishda?

13. Ushbu 1) $5x+12y-26=0$, 2) $3x-4y+10=0$,

3) $y=3x+5$, 4) $2x+2y+7=0$ to`g`ri chiziq tenglamalarini normal ko`rinishga keltiring.

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Analitik geometriyada chiziq nima asosida o`rganiladi?

A) tenglama; B) chizma; C) proyeksiya; D) ta`rif ; E) To`g`ri javob yo`q.

2. Tekislikdagi to`g`ri chiziqning umumiy Ax+By+C=0 tenglamasidagi A va B koeffitsiyentlar qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?

A) A·B>0; B) A+B=0; C) A–B<0 ; D) $A^2+B^2\neq 0$; E) $A^2-B^2\neq 0$.

3. Tasdiqni yakunlang: Tekislikdagi to`g`ri chiziqning umumiy Ax+By+C=0 tenglamasi bo`yicha tuzilgan **n=**(A,B) vektor bu to`g`ri chiziqqa.

A) parallel bo`ladi; B) tegishli bo`ladi ; C) perpendikular bo`ladi ;

D) perpendikular bo`lmaydi; E) og`ma bo`ladi .

4. Tekislikdagi to`g`ri chiziqning umumiy 3x+5y+2=0 tenglamasi bo`yicha uning **n =**(A,B) normal vektorini toping.

A) **n =**(5,2); B) **n =**(3,5); C) **n =**(3,2); D) **n =**(2,5); E) **n =**(5,3).

5. Tekislikdagi to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini ko`rsating.

A) $y = kx + b;$ B) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; C) Ax + By + C = 0;

D) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; E) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Tekislikdagi to`g`ri chiziq (n+2)x+(n+3)y+(2n–1)=0 umumiy tenglamasi bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini
b) to`g`ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini
c) to`g`ri chiziqning normal tenglamasini
d) to`g`ri chiziqning parametrik tenglamasini
e) to`g`ri chiziqni koordinata o`qlari bilan kesishish nuqtalarini

2. Tekislikdagi to`g`ri chiziq (n-5)x+(n+1)y+(3n+2)=0 umumiy tenglamasi bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini
b) to`g`ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini
c) to`g`ri chiziqning normal tenglamasini
d) to`g`ri chiziqning parametrik tenglamasini
e) to`g`ri chiziqni koordinata o`qlari bilan kesishish nuqtalarini

DARAJALI, TRIGONOMETRIK, KO`RSATGICHLI VA LOGARIFMIK FUNKSIYALAR

DARAJALI, TRIGONOMETRIK, KO`RSATGICHLI VA LOGARIFMIK FUNKSIYALAR

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga darajali, trigonometrik, ko`rsatgichli va logarifmik funksiyalarni bajarishda bilim , malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Darajali funksiya

Bu funksiya y=xα ko`rinishda bo`lib, o`zgarmas daraja ko`rsatkichi $\alpha \in$ R bo`ladi. Masalan,

$$y = 1 = x^0, \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

darajali funksiyalardir. Darajali funksiyaning xossalari α daraja ko`rsatkichi qiymatiga bog`liq bo`ladi. Masalan, $\alpha$ musbat butun son bo`lsa, f(x)=xα aniqlanish sohasi D{f}=(−∞,∞), qiymatlar sohasi esa toq α uchun E{f}=(−∞,∞), juft α uchun E{f}=[0,∞) bo`ladi. Agar $\alpha$ manfiy butun son bo`lsa, f(x)=xα aniqlanish sohasi D{f}={x: x≠0}, qiymatlar sohasi esa E{f}=(−∞,∞) bo`ladi. Bundan tashqari $\alpha$ juft son bo`lsa, f(x)=xα juft, α toq bo`lsa toq funksiya bo`ladi.

Ko`rsatkichli funksiya

Bu funksiya y=ax ko`rinishda va unda daraja asosi a>0 va a$\neq$1 shartni qanoatlantiruvchi o`zgarmas son bo`ladi. Masalan, y=3x, y=(1/10)x, y=ex ko`rsatkichli funksiyalardir. Bu funksiya uchun D{f}=(−∞,∞), E{f}=(0,∞) bo`ladi. Agar a>1 bo`lsa, f(x)=ax o`suvchi, 0<a<1 bo`lsa kamayuvchi funksiyaga ega bo`lamiz.

Logarifmik funksiya

Bu funksiya y=logax, (a>0, a$\neq$1), ko`rinishda bo`lib, y=ax ko`rsatkichli funksiyaga teskari funksiyani ifodalaydi.

Masalan, y=log2x, y= log 0.8 x , y= log10x =lgx, y= logex =lnx logarifmik funksiyalardir. Logarifmik f(x)=logax funksiya uchun D{f}=(0,∞), E{f}=(−∞,∞) bo`ladi. Agar logarifm asosi a>1 bo`lsa, f(x)=logax o`suvchi, 0<a<1 holda esa kamayuvchi bo`ladi.

Trigonometrik funksiyalar

Bular y=sinx, y=cosx, y=tgx va y=ctgx funksiyalardan iborat. Bu yerda f(x)=sinx va f(x)=cosx funksiyalar uchun D{f}=(−∞,∞) va E{f}=[0,1] bo`lib, ular T=2π davrli va chegaralangan bo`ladi. Bunda f(x)=sinx–toq, f(x)=cosx–juft funksiyalardir.

f(x)=tgx va f(x)=ctgx funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda D{f}={x: x≠(2k+1)π/2, k$\in$Z} va D{f}={x: x≠kπ, k$\in$Z }, qiymatlar sohasi E{f}=(−∞,∞) bo`ladi. Bu funksiyalar T=π davrli, toq va chegaralanmagan bo`ladi.

Teskari trigonometrik funksiyalar

Bularga y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx funksiyalar kiradi.Ular mos trigonometrik funksiyalarga teskari bo`ladi. f(x)=arcsinx va f(x)=arccosx uchun D{f}=[–1,1], qiymatlar sohasi esa mos ravishda E{f}=[–π/2, π/2] va E{f}=[0, π] bo`ladi. f(x)=arctgx va f(x)=arcctgx uchun D{f}=(–∞,∞), qiymatlar sohasi esa mos ravishda E{f}=(–π/2, π/2) va E{f}=(0, π) bo`ladi. Bundan tashqari f(x)=arcsinx va f(x)=arctgx toq funksiyalardir.

Funksiya tushunchasi matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo`lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko`p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo`lgan to`plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to`plami bo`lsin. $x \in X$ to`plamda, $y \in Y$ to`plamda o`zgarsin.

Ta`rif. $x \in X$ har bir $x$ ga biror qoida yoki qonun bo`yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo`yilsa, $X$ to`plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to`plamga funksiyaning aniqlanish sohasi, $Y$ to`plamga o`zgarish sohasi yoki qiymatlar to`plami deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar to`plamini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o`rnatilgan bo`lsa, bu moslikka X to`plamda funksiya aniqlangan deyiladi. $x$ ga erkli o`zgaruvchi yoki argument, y ga esa erksiz o`zgaruvchi yoki x ning funksiyasi deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo`lishi uchun: 1) $X$ to`plam berilishi kerak (ko`p hollarda uni $x$ bilan $y$ o`zgaruvchilarning bog`lanishiga ko`ra topiladi); 2) x o`zgaruvchining $X$ to`plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo`yiladigan $y$ ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta`rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan; 1) f $X = (-\infty, +\infty)$ to`plamga tegishli bo`lgan har bir songa uning o`zini o`ziga ko`paytirib, ya`ni kvadratga ko`tarib mos qo`yuvchi qoida bo`lsin. Bu holda $y = x^2$ funksiya hosil bo`ladi. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x \in [0, +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo`ysin. Bu $y = \sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0, +\infty)$ bo`ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ma`lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi $x$ ning shunday qiymatlari to`plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo`lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x - 3 \geq 0,$$
$$4 - x > 0$$

bo`lgandagina $x$ ning har bir qiymatiga mos keladigan $y$ ning qiymati haqiqiy bo`ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x \geq 3$, $x < 4$ bo`lib, ya`ni $3 \leq x < 4$ bo`lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3, 4)$ bo`ladi.

3. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta`rifida keltirilgan $x$ o`zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo`yiladigan $y$ ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo`lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya analitik, jadval va grafik hamda kompyuter usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaing analitik usul bilan berilishida, x o`zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan $y$ ning qiymati, $x$ argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya`ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

2) o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanish jadval ko`rinishida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda $P_1$ bosim ostida uning qaynash temperaturasi $t_1$, $P_2$ bosim ostida qaynash temperaturasi $t_2$ va h.k. bo`lishini topganda qo`yidagi jadval kelib chiqadi.

Bosim P	P_1	P_2	...	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	...	t_n

Bundan ko`rinadiki $P$ bosim bilan $t$ temperatura orasida bog`lanish bo`lib, $P$ argument, $t$ funksiya bo`ladi. Funksiyaning bunday berilishiga jadval usulda berilgan deyiladi. Bunday usul ko`proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning grafik usulida berilishida, x va y o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to`plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. $XOY$ tekis-likda $l$ chiziq berilgan bo`lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o`qiga perpendikulyar o`tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o`tadi. $A$ nuqtadan $OY$ o`qiga perpendikulyar o`tkazamiz, bu perpendikulyarning $OY$ o`qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo`ladi. Ma`lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, grafik usulda berilgan deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo`lgan hollarda va funksiyaning sifat o`zgarishi grafik usulda yaxshi ko`rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) algoritmik yoki kompyuter usuli. Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo`ladi. Bunday programma EHMga qo`yilgan bo`lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

Funksiyaning ayrim hollari

1. Oshkor va oshkormas funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko`rinishda, ya`ni y ga nisbatan yechilgan bo`lsa, unga oshkor funksiya deyiladi. Funksiya $F(x,\ y) = 0$ ko`rinishda berilgan bo`lsa, ya`ni y ga nisbatan yechilmagan bo`lsa, oshkormas funksiya ko`rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5,\ \ y = \sin x,\ \ y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko`rinishda; $2x - 3y + 6 = 0,\quad x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko`rinishda berilgan. Shuni ta`kidlaymizki hamma $F(x,\ y) = 0$ ko`rinishdagi tenglik ham funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning haqiqiy son qiymatini mos qo`yish mumkin emas.

2. Murakkab funksiY. $y = f(u)$ bo`lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo`lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ funksiyaning funksiyasi yoki y ga x ning murakkab funksiyasi deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo`lib. $y$ $x$ ning murakkab funksiyasi bo`ladi. Bundan tashqari $y = \sin(x^2 + 1),\ \ y = 3^{x+5},\ \ y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo`la oladi.

3. Teskari funksiY. $y = f(x)$ funksiya berilgan bo`lsin. $y$ funksiyaning qiymatlar to`plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo`yilgan bo`lsa, berilgan funksiyaga teskari $x = d(y)$ funksiya berilgan bo`ladi va $D(f) = E(d)$ va $E(f) = D(d)$ har bir $x_0 \in D(f) = E(d)$ va $y_0 = E(f) = D(d)$ bo`lib. $y_0 = f(x_0)$ faqat $x_0 = d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y = 2x - 3$ funksiyaga teskari funksiya $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ bo`ladi. $y = x^3$ funksiya $x = \sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo`ladi. O`zaro teskari bo`lgan funksiyalarning grafiklari $y = x$ to`g`ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo`ladi.

Mavzuga doir misol va masalalar

1. $f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan:1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$;
4) $f(2a)$ larni hisoblang.

2. Quyidagi funksiyalarning $D(f)$ aniqlanish sohasini va $E(f)$ qiymatlar to`plamini toping:

1) $f(x) = \ln(x+3)$; 2) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$; 3) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$.

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $f(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$; 2) $f(x) = (a + x)/(a - x)$;

3) $f(x) = \lg(5x - x^2 - 6)$; 4) $f(x) = 2^{\arccos(1-x)}$.

4. Hajmi $v = 1$ birlikka teng bo`lgan silindr asosining radiusi $r$ va balandligi $h$ orasidagi funksional bog`lanishni toping.

5. 1) $f(u) = 1 - u,\ u = x^2$; 2) $f(u) = 1/(1-u),\ \ u(x) = x - 1/x$;

3) $f(u)=u^2, \ u(x)=4x$

funksiyalardan x ning murakkab funksiyalarini tuzing.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o`zgarish sohalarini aniqlang:

1) $f(x)=x^2-1, \ x\in[0, +\infty)$; 2) $f(x)=2x+3, \ x\in(-\infty, +\infty)$; 3) $f(x)=(x-1)^3, \ x\in(-\infty, +\infty)$; 4) $f(x)=x^2-1, \ x\in(-\infty, 0]$.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=-\frac{3}{x}$; 3) $y=2-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{2}{x-1}$.

FUNKSIYALAR LIMITLARINI HISOBLASH

FUNKSIYALAR LIMITLARINI HISOBLASH

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga funksiyalar limitlarini hisoblashda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

$y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo`lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo`lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad ёки \quad x \to a \quad да \quad f(x) \to A \quad (1)$$

Funksiya limitining ta`rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo`lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo`ladi.

$y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo`lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo`lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o`zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad (2)$$

bilan belgilanadi.

Faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo`lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning chap yoki o`ng limit tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x\to a-0} f(x), \ \lim_{x\to a+0} f(x) \quad (3)$$

bilan begilanadi.

Limiti $A = 0$ bo`lgan funksiyaga cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.) deyiladi.

Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo`lgan funksiyalarga cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.) deyiladi va

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad (4)$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta`rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o`zgarmas miqdorning limiti o`ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) yig`indining limiti. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig`indisining limiti, qo`shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig`indisiga teng, ya`ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \to a$ dagi limitlari mavjud bo`lsa,

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \quad (5)$$

2) chekli sondagi funksiyalar ko`paytmasining limiti funksiyalar limitlarining ko`paytmasiga teng, ya`ni

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \quad (6)$$

Natija: O`zgarmas ko`paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya`ni,

$$\lim_{x\to a}[cf_1(x)] = c\lim_{x\to a} f_1(x) \quad (7)$$

3) Ikkita funksiya nisbatining limiti, maxrajning limiti no`ldan farqli bo`lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya`ni $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$ bo`lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \quad (8)$$

bo`ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x} = 1; \ (9)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e, \qquad e = 2{,}71828\ldots \quad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar deyiladi.

Aniqmasliklar va ularni ochish

Aniqmasliklar. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo`lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da (0/0) ko`rinishdagi aniqmaslik deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo`lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da $(\infty/\infty)$ ko`rinishidagi aniqmaslik deyiladi. Xuddi shunga o`xshash $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)-\varphi(x)\right], \quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] \quad \textit{ва} \quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga aniqmasliklarni ochish deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko`rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o`zaro teng bo`lsa, ularning $x\to a$ dagi limiti ham teng bo`ladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x)=\dfrac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning $x=3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2-9}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x)$$

bo`ladi, ya`ni

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

natijaga ega bo`lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+6}{6x} = \dfrac{5}{6}$ ekanligini funksiya limitining ta`rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish: Buni isbotlash uchun $f(x)=(5x+6)/6x$ o`zgaruvchi miqdor va $A=5/6$ o`zgarmas miqdor orasidagi farq $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko`rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\frac{5x+6-5x}{6x}=\frac{6}{6x}=\frac{1}{x}$$

$1/x$ o`zgaruvchi miqdor $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to\infty}(5x+6)/6x=5/6..$$

Misol. $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$ ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2-5x+4)$ larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish: $x\to 3$ bo`lganligi uchun $x-3=\alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x=3+\alpha$ ni $(2x^2-5x+4)-7$ ayirmaga qo`yib,

$$2(3+\alpha)^2-5(3+\alpha)+4-7=2(9+6\alpha+\alpha^2)-15-5\alpha+4-7=$$
$$=18+12\alpha+2\alpha^2-15-5\alpha+4-7=2\alpha^2+7\alpha$$

natijaga ega bo`lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo`lganligi uchun $2\alpha^2+7\alpha$ ham cheksiz kichik bo`ladi. Shunday qilib, $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$ isbot bo`ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2-5x+4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko`rsataylik. Ma`lumki $x\to 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to 3$
$2x^2-5x+4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to 7$

Bu jadvaldan ko`rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya`ni $x-3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2-5x+4-7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to`g`ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x<3$ bo`lib, $x\to 3$ holni qaradik. $x>3$ bo`lib, $x\to 3$ holni o`quvchiga mustaqil ko`rsatishni tavsiya qilamiz.

Misol. $\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$ limitni hisoblang.

Yechish: Algebraik yig`indining limiti, (5) formula, o`zgarmas ko`paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (7) formulalarga asosan:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim_{x\to 2}\lim 3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=$$
$$=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$$

hosil bo`ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o`rniga uning limitik qiymatini qo`yishga olib keldi.

Misol. $\lim_{x\to 1}(3x^2-4x+7)/(2x^2-5x+6)$ limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo`llasak,

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim\limits_{x\to1}\left(2x^2-5x+6\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}3x^2-\lim\limits_{x\to1}4x+\lim\limits_{x\to1}7}{\lim\limits_{x\to1}2x^2-\lim\limits_{x\to1}5x+\lim\limits_{x\to1}6}=$$

$$=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to1}x\right)^2-4\left(\lim\limits_{x\to1}x\right)+7}{2\left(\lim\limits_{x\to1}\right)^2-5\lim\limits_{x\to1}x+6}=\frac{3\cdot1^2-4\cdot1+7}{2\cdot1^2-5\cdot1+6}=\frac{6}{3}=2$$

bo`ladi.

Ratsional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiyalarning $x\to a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo`ladi. Masalan,

$$\lim_{t\to1}\left[\lg\left(t+\sqrt{t^2+80}\right)+\sqrt{t^2+8}\right]=\lg(1+\sqrt{t^2+80})+\sqrt{1+8}=\lg10+3=1+3=4.$$

Misol. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+2}$ limitni hisoblang.

Yechish: $x=1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko`rinish-dagi aniqmaslik hosil bo`ladi.

Surat va maxrajni $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ formula yordamida chiziqli ko`paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2+ba+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)}=\frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)}=5/3$$

bo`ladi.

Misol. $\lim\limits_{x\to1}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to\infty$ da (∞/∞) ko`rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo`lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya`ni $x^2$ ga bo`lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x+4/x^2}{3+7/x-2/x^2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6+5/x+4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+7/x-2/x^2)}=\frac{6+0+0}{3+0+0}=2$$

bo`ladi. Bunda $5/x,\ 4/x^2\ \ 7/x,\ 2/x^2$ lar $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

Misol. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ limitni hisoblang.

Yechish: $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo`ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irratsional ifoda mavjud, uni suratga o`tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1}+2$ ga ko`paytiramiz.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{(x+1)^2}-2^2} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)} =$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{x+1}+2)=6\cdot 4=24.$$

Misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ bo`lganligi uchun

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x} =$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} = -\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x} =$$

$$=-\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

natijani olamiz.

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish: $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ bo`ladi.

Shuning uchun, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5$, chunki $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

Misol. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish: $x\to\infty$ da limitga o`tsak, $1^\infty$ ko`rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x=\alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x=3/\alpha$ hamda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ bo`ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3=e^3$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x=e^3$.

Misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to 1$da $1/(x-1)\to\infty$ va $2/(x^2-1)\to\infty$ bo`lib, $(\infty-\infty)$ ko`rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x\to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo`ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

Misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to+\infty$ da $\infty-\infty$ ko`rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Oxirgi ifoda $x\to\infty$ da (∞/∞) ko`rinishdagi aniqmaslik bo`lib, misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo`lib,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

bunda $x\to+\infty$ da $3/x\to 0$ bo`ladi.

Muhim limitlar

$$\lim_{x\to 0}(1+k\alpha)^{1/\alpha}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$

Misol.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2x+1}{2}\cdot 8x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x}{2+\frac{1}{x}}}=e^8$$

Misol. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x}{x}=\ln 4$

Misol. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+2x)}{2x}=2\cdot 1=2$

1. $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-x-3}$

2.. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

3. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{x^2-9}$

4. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-5x+6}$

5. $\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-3x-10}{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x+\sin 7x}$

8. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$

9. $\lim_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{3x}{x-1}}$

10. $\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$

Funksiyaning uzluksizligi

Agar X_0 va uning atrofida aniqlangan u=f(x) funksiya shu nuqtada $x=x_0$ limitga ega bo`lib, bu limit funksiyaning X0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya`ni $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo`lsa, u holda bu funksiya X_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar u=f(x) funksiya X_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo`lib, argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning cheksiz kichik ortirmasi mos kelsa, ya`ni $\lim_{\Delta x\to 0}$ bo`lsa u holda funksiya X0 nuqta uzluksiz deyiladi. bu yerda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ mos ravishda argument va funksiya orttirimalari.

f(x) funksiyaning X_0 nuqtada uzluksiz bo`lishi uchun uzluksizlikning quyidagi shartlari bajarilishi zarur va yetarlidir.

a) funksiya X_0 nuqta atrofida aniqlangan.

b) funksiyaning $X=X_0$ nuqtasi chap va o`ng limtlari teng $f(x_0-0)=f(x_0+0)$

v) $X=X_0$ nuqtadagi bir tomonli limitlar $f(x)$ ga teng, ya`ni $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

f(x) funksiya X_0 nuqtaning atrofida aniqlangan, ammo bu nuqtaning o`zida uzluksiz shartlaridan aqalli bittasi bajarilmasa, bu funksiya X_0 nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Agar $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ limitlar mavjud bo`lsa va shu bilan birga $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ sonlar o`zaro teng bo`lmasa, u holda x_0 nuqta 1-tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Agar $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ bo`lsa u holda x0 bartaraf qilinadigan uzilish nuqtasi deyiladi.

Agar $f(x_0-0)$ yoki $f(x_0+0)$ bir tomonli limitlardan aqalli bittasi ∞ga teng bo`lsa, x_0 nuqta 2-tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Misol. $y=\frac{6x}{x+6}$ funksiya va x argumentning ikkita $x_1=5$ va $x_2=6$ qiymatlari berilgan.

Bu funksiyaning berilgan x_1 va x_2 qiymatlarida uzluksizligini yoki uzilishga egaligini aniqlang: uzilish nuqtasida bir tomonli limitlarni xisoblang: sxematik chizmani chizing.

$x_1=5$ qiymatida uzilishga ega emas, chunki

$$y(5)=\frac{6\cdot 5}{5+6}=\frac{30}{11}\qquad va\qquad \lim_{x\to 5}\frac{6x}{x+6}=\frac{30}{11}=y(5)$$

Bu funksiya x_2=-6 qiymatda aniqlanmagan, demak bu nuqtada funksiya uzilishga ega.

Endi funksiyaning x_2=-6 nuqtadagi chap va o`ng limitini xisoblaymiz.

$$\lim_{x\to -6-0}\frac{6x}{x+6}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -6+0}\frac{6x}{x+6}=-\infty$$

Misol. $y=f(x)=\begin{cases}3x+1, agar & x\le 0 \quad bo'lsa\\ x^2+1, agar & 0<x\le 1 \quad bo'lsa\\ 1 \quad agar & x>1 \quad bo'lsa\end{cases}$

Funksiya berilgan, bu funksiyaning: uzilish nuqtalari bor bo`lsa, ularni toping va turini aniqlang: uzilish nuqtalarida bir tomonli limitni toping va sakrashini aniqlang. Sxematik chizmani chizing.

Yechish: 1) funksiyani x=0 va x=1 nuqtalarda tekshiring.

x=0 bo`lsin, u holda

$$f(x)=1;\qquad \lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(3x+1)=1;$$

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x^2+1)=1$$

Demak, $f(0-0)=f(0+0)\quad va\quad f(x)\quad x=0$ nuktada uzluksizdir

x=1 bo`lganda $f(1)=1^2+1=2;\qquad \lim f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=2;\qquad \lim_{x\to 1+0}1=1$

Demak, $f(1-0)=f(1)\neq f(1+0)\qquad va\qquad f(x)\quad x=1$

Nuqtada 1-tur uzilishga ega. Bu nuqtada u chapdan uzluksiz ekan.

2. f(x) uchun f(1-0)=2 va f(1+0)=1; f(x) funksiyaning x=1 nuqtadagi sakrashi

$\left|f(1+0)-f(1-0)\right|=\left|1-2\right|=1$ bo`ladi.

3. f(x) funksiyaning sxematik grafigini chizamiz.

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}1=1$$

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}(3x+1)=-\infty$$

Mavzuga doir misol va masalalar

1. Funksiyalarni uzilishi nuqtasini toping va uzilish turini aniqlang.

$1.\ y=\frac{4x}{x-1}\qquad 3.\ y=\frac{2x}{x+2}\qquad 5.\ y=7^{\frac{1}{5-x}}$

$2.\ y=\frac{x}{x-3}\qquad 4.\ y=\frac{x}{x+1}\qquad 6.\ y=6^{\frac{1}{x+3}}$

2. y=f(x) funksiya va x argumentning ikkita x_1,x_2 qiymati berilgan. Argumentning berilgan qiymatlarida funksiyaning.

Uzluksiz yoki uzilishga ega ekanligini aniqlang: uzilish nuqtalarida bir tomonli limitlarni xisoblang. Sxematik chizmani chizing.

$1.\ y=\dfrac{3x}{x-1};\qquad x_1=1;\qquad x_2=3$

$2.\ y=\dfrac{4x}{x-2};\qquad x_1=2;\qquad x_2=5$

$3.\ y=\dfrac{x}{x-3};\qquad x_1=-2;\qquad x_2=3$

$4.\ y=\dfrac{5x}{x-5};\qquad x_1=-1;\qquad x_2=5$

$5.\ f(x)=2^{\frac{1}{x-5}};\ x_1=1;\qquad x_2=5$

$6.\ f(x)=4^{\frac{1}{x+3}};\ x=2;\qquad x_2=-3$

3. y=f(x) funksiya x argumentning har hil o`zgarish oralig`ida turli analitik ifodalar yordamida berilgan funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping (agar mavjud bo`lsa) va ularning turlarini aniqlang uzilish nuqtalarida bir tomonli limitlarni xisoblang va sakrashini toping. Sxematik chizmasini chizing.

$$1)\ y=\begin{cases}-2x, agar & x<-1\ bo'lsa\\ x^2+1, agar & -1\le x<2\quad bo'lsa\\ x-1, agar & x\ge 2\ \ bo'lsa\end{cases}$$

$$2)\ y=\begin{cases}-3-x, agar & x<-2\ bo'lsa\\ x^2-5, agar & x-2\le x<3\quad bo'lsa\\ 7-2x, agar & x\ge 3\ \ bo'lsa\end{cases}$$

$$3)\ y=\begin{cases}2x+1, agar & x<-1\ bo'lsa\\ x^2, agar & -1\le x\le 2\quad bo'lsa\\ 6-x, agar & x>2\ \ bo'lsa\end{cases}$$

$$4)\ y=\begin{cases}x+1, agar & x\le 0\ \ bo'lsa\\ \cos x, agar & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\quad bo'lsa\\ 2, agar\ x\ge\dfrac{\pi}{2}\ \ bo'lsa\end{cases}$$

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{5x}=\dfrac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)=5$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8)=3$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2)-4x+6=10$

ekanligini funksiya limiti ta`rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar kiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

5. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalaridan foydalanib hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right]$.

6. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko`rinishdagi aniqmasliklarni oching:

1) $f(x)>0$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

7. Quyidagi limitlarni hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

8. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin 1/x$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2/n)^n$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-5/n)^n$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/3n)^n$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x)^{1/x}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n/(n+1)]^n$.

9. Quyidagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Funksiya limiti ta`rifini to`ldiring: y=f(x) funksiya x→a bo`lganda A soniga teng limitga ega deyiladi, agarda ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki , $|x-a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x uchun … bo`lsa.

A) $|f(x)+A| < \varepsilon$; B) $||f(x)-A| > \varepsilon$; C) $|f(x)+A| > \varepsilon$;

D) $|f(x)-A| < \varepsilon$; E) $|f(x)-A| = \varepsilon$.

2. $y=2x^2+5x-1$ funksiyaning x→2 bo`lgandagi limiti topilsin.

A) 10; B) 12; C) 17; D) 21; E) –1.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ limitni hisoblang:

A) 0; B) ∞; C) – ∞; D) 3; E) –1.

4. Ushbu funksiyaning x=1 nuqtadagi chap limitini toping:

$$y=\begin{cases}3x-1, & x<1;\\ 2x+1, & x\geq 1.\end{cases}$$

A) –2; B) –1; C) 1; D) 2; E) 3.

5. Ushbu funksiyaning x=0 nuqtadagi o`ng limitini toping:

$$y=\begin{cases}3x^2+2x-1, & x\leq 0;\\ 2x^2+1, & x>0.\end{cases}$$

A) –2; B) –1; C) 1; D) 3; E) ∞.

6. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $x\to 0$ bo`lganda cheksiz kichik miqdor emas ?
A) sinx ; B) x^3 ; C) 2^x-1 ; D) cosx ;
E) keltirilgan barcha funksiyalar cheksiz kichik miqdor bo`ladi.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi limitlarni hisoblang:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-1}{n^x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)x^n-nx+1}{x^n+nx^{n-2}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n+\cos nx-n}{\ln(x+n^x)+1}$.

2. Quyidagi funksiyaning x=0 nuqtadagi chap va o`ng limitini toping:

$$f(x)=\begin{cases}n-\sin nx, & x<0;\\ n-e^{nx}, & x\geq 0.\end{cases}$$

FUNKSIYALAR HOSILALARINI HISOBLASH. HOSILANI HISOBLASH QOIDALARI

FUNKSIYALAR HOSILALARINI HISOBLASH. HOSILANI HISOBLASH QOIDALARI

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga funksiyalar hosilalarini hisoblash. Hosilani hisoblash qoidalarini bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

Oniy tezlik haqidagi masala. Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo`ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma`lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o`zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o`tilgan yo`lning shu yo`lni o`tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o`zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko`pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og`ir moddiy nuqtaning bo`shliqda og`irlik kuchi ta`sirida erkin tushushi masalasini qaraylik. Fizikadan ma`lumki, bo`shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S=\frac{g}{2}t^2 \quad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o`tgan yo`l, g erkin tushish tezlanishi, $g\approx 9{,}81 м/сек^2$. Bu harakat notekis bo`lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo`lsin. $OA$ yo`lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya`ni $t$, $\Delta t$ orttirma qabul qiladi. $t+\Delta t$ momentda nuqta $B$ holatda bo`ladi. AB, vaqt Δt orttirma olgandagi yo`l orttirmasi, uni $AB=\Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t+\Delta t$ qo`yib, $S+\Delta S=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2$, bundan $\Delta S=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{gt^2}{2}$

yoki $\Delta S=\frac{g}{2}(2t\Delta t+\Delta t^2)$.

Oxirgi tenglikni Δt ga bo`lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{g}{2}(2t+\Delta t) \qquad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma`lumki, $\Delta S/\Delta t$ nisbat $t$ va $\Delta t$ ga bog`liq. Masalan: $\Delta t=0{,}1$ sek, $t=1$ sek bo`lganda,

$\frac{\Delta S}{\Delta t}-\frac{g}{2}(2\cdot 1+0{,}1)=1{,}05g$ bo`lib, $t=3$ sek bo`lganda

$\frac{\Delta S}{\Delta t}-\frac{g}{2}(2\cdot 3+0{,}1)=3{,}05g$ bo`ladi.

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo`ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi **oniy tezlik** haqida gapirish kerak bo`ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma`lumki, $t$ o`zgarmas bo`lganda, $\Delta S/\Delta t$ A dan $B$ holatgacha oraliqdagi o`rtacha tezlik bo`lib, uni $v_{ур}$ bilan belgilaymiz. Ma`lumki, Δt qancha kichik bo`lsa, $t$ momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning $t$ momentidagi oniy tezligi $v$ ni $v_{ур}$ o`rtacha tezlikning $\Delta t\to 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya`ni

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo`yidagi ko`rinishdagi limitni hisoblash kerak bo`ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (3)$$

(3) ko`rinishdagi limitni hisoblashga ko`p sondagi amaliy masalalarni yechishda to`g`ri keladi.

Umuman, o`zgaruvchi miqdor o`zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko`rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo`ladi.

Funksiya hosilasi

$y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo`lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Bu limit

$$y',\ f'(x_0),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta`rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo`ladi, bu limit mavjud bo`lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni **differensiallash deb** ataladi.

Biz o`rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflan-masin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo`lsa, demak $Q$ $\tau$ ning funksiyasi bo`ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o`tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o`tayotgan elektr miqdori bo`lsa, $Q$ hosila tok kuchining o`zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o`zgaruvchi temperaturasini tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta`rifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

Misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta`rifiga asosan toping.

Yechish: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

Misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta`rifiga asosan, toping.

Yechish: Argument x, Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \Delta x / 2)\sin \Delta x / 2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)};$$

$$\Delta x\to 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\to\cos x. \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=1.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x,\qquad y'=(\sin x)'=\cos x$

bo`ladi.

Umuman, x va y o`zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma`nolaridan voz kechsak, y dan x bo`yicha olingan hosila, $y$ ning $x$ ga bog`liq bo`lib o`zgarishining tezligini ifodalaydi.

Hosilaning geometrik ma`nosi

Hosila muhim geometrik ma`noga ega. Bu funksiyaning $x_0$ nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0,\, f(x_0))$ **nuqtada o`tkazilgan urinmaning** OX o`qining musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. $y=f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0,\, y_0)$ nuqtadan **o`tkazilgan urinma tenglamasi**

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

bo`ladi, bunda $y_0=f(x_0)$. Funksiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0,\, y_0)$ da o`tkazilgan normalning tenglamasi

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ (f'(x_0)\neq 0)$$

bo`ladi.

Misol. $y=\frac{x^3}{3}+4$ egri chiziqqa abssissasi $x_0=2$ nuqtada o`tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

Yechish: $y_0=\frac{20}{3},\qquad y'(2)=2^2=4,\qquad y-\frac{20}{3}=4(x-2)$

yoki

$3y-20=12(x-2)$, $12x-3y-4=0$, bu $M_0(2{,}20/3)$ nuqtadan o`tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffitsiyenti

$-\frac{1}{f'(x_0)}=-\frac{1}{4},$ demak, $y-\frac{20}{3}=-\frac{1}{4}(x-2)$

yoki

$$12y-80=-3(x-2),\ 3x+12y-86=0$$

bo`lib, bu $M_0$ nuqtadan o`tkazilgan normalning tenglamasi bo`ladi.

Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali

1). Agar $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, ya`ni $y=f[\varphi(x)]$ **murakkab funksiya** bo`lsa, $y=f(u)$ funksiyaning x o`zgaruvchi bo`yicha hosilasi

$$y'=f'(u)\cdot u'$$

bo`ladi.

Agar $y=f(x)$ va $x=\varphi(y)$ lar o`zaro teskari funksiyalar bo`lsa,

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo`ladi.

Differensiallash qoidalari:

x erkli o`zgaruvchi, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ uning differensiallanuvchi funksiyalari bo`lsin.

1. $C' = 0$ $C-$o`zgarmas miqdor.
2. $x' = 1$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
5. $(cu)' = c \cdot u'$.
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$.

Murakkab funksiya uchun hosilalar jadvali quyidagicha bo`ladi:

1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $n \in R,$ $u > 0$;
2) $(a^u)' = a^u \cdot 1na \cdot u'$;
3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot 1na} \cdot u'$;
5) $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
8) $(tg\ u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
9) $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
10) $(\arcsin\ u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11) $(\arccos\ u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
12) $(arctg\ u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13) $(arcctg\ u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
14) $(u^v)' = vu^{м-1} \cdot u' + u^v \cdot 1nu \cdot v'$.

Yuqori tartibli hosilalar

$y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb, uning hosilasidan olingan hosilaga, ya`ni $(y')'$ ga aytiladi. Ikkinchi tartibli hosila quyidagilarning biri bilan belgilanadi: $y'',\ f''(x),\ d^2y/dx^2$.

$y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb uning $(n-1)$ tartibli hosilasidan olingan hosilaga aytiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanadi $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $d^n y/dx^n$. Ta`rifga ko`ra $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$.

Misol. $y = (2x^2 - 7)^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish:

$$y' = \left[(2x^2-7)^3\right]' = 3(2x^2-7)^2(2x^2-7)' = 3(2x^2-7)^2\cdot 4x = 12x(2x^2-7)^2\ ;$$

$$y'' = (y')' = \left[12x(2x^2-7)^2\right]' = 12\left\{x'(2x^2-7)^2 + x\left[(2x^2-7)^2\right]'\right\} =$$
$$= 12\left[(2x^2-7)^2 + 2x(2x^2-7)\cdot 4x\right] = 12(2x^2-7)(2x^2-7+8x^2) =$$
$$= 12(2x^2-7)(10x^2-7).$$

Demak, $y'' = 12(2x^2-7)(10x^2-7)$.

Misol. $y = x^n$ funksiyaning $n-$tartibli hosilasini toping.

Yechish: $y' = nx^{n-1}$, $y^n = n(n-1)x^{x-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \ ....,\ y^{(n-1)} =$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ \left[n-(n-2)\right]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ 2x$$
$$y^{(n)} = n(n-1(n-2)(n-3)\ ...\ 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

$(n!)$ 1 dan n gacha bo`lgan sonlar ko`paytmasining qisqa yozilishi).

Oshkormas va parametrik berilgan funksiyalarning hosilalari

x o`zgaruvchining $y$ funksiyasi **oshkormas ko`rinishda** $F(x,\ y)=0$ berilgan bo`lsa, $y'$ hosilani topish uchun $F(x,\ y)=0$ tenglikni $x$ bo`yicha differensiallab, so`ngra hosil bo`lgan tenglamadan y' ni topamiz. Ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilalar ham shu kabi topiladi.

Misol. $x^2+y^2=100$ oshkormas ko`rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani toping.

Yechish: $2x+2y\cdot y'=0;\quad 2yy'=-2x,\quad y'=-x/y;$ keyingi ifodadan yana hosila olib,

$$(y')' = -\frac{x'y-x(y)'}{y^2} = -\frac{y-xy'}{y^2}\qquad .$$

Endi , $y' = -\dfrac{x}{y}$ ni xisobga olsak,

$$y'' = -\frac{y-x(-x/y)}{y^2}$$

yoki

$$y'' = -\frac{x^2+y^2}{y^3};\ y'' = -\frac{100}{y^3}$$

bo`ladi, chunki, $x^2+y^2=100$ edi.

Funksional bog`lanish parametrik

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ko`rinishda berilgan bo`lsa, $dy/\ dx, d^2y/\ dx^2$ hosilalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (1)$$

formula bilan topiladi.

Misol.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

parametrik ko`rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\ \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t,\ \frac{dy}{dt} = a\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin t$$

(1) formulaga asosan,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a\sin t\cdot(-a\sin t)-(-a\cos t)\cdot a\cos t}{(-a\sin t)^3} = \frac{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t} =$$

$$= -\frac{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}{a^3\sin^3 t} = -\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

Demak, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$

bo`ladi.

Misol. Ushbu

$$y = f(x) = |x|$$

funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o`ng va chap hosilalari topilsin.

◀Ravshanki,

$$\Delta f(0) = f(0+\Delta x) - f(0) = |\Delta x|$$

bo`lib,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

bo`ladi. Limitga o`tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Demak, berilgan funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o`ng hosilasi

$$f'(0+0) = 1$$

chap hosilasi

$$f'(0-0) = -1$$

bo`ladi. ▶

Eslatma. Yuqorida qaralgan $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega bo`lmaydi.

Misol. Ushbu

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

parabolaga $M_0(1;1)$ nuqtada o`tkazilgan urinma va normalning tenglamasi topilsin.

◀Bu tenglamalarni topishda yuqoridagi (1) va (2) formulalardan foydalanamiz. Bu holda

$f(x) = 2x^2 - 6x + 3,\ \ x_0 = 1,\ \ y_0 = -1,\ \ f'(x_0) = f'(1)$

Bo`ladi. Hosila ta`rifidan foydalanib $f'(1)$ni topamiz.

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(1+\Delta x)^2-6\cdot(1+\Delta x)+3-(2\cdot 1-6\cdot 1+3)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x^2-2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x-2)=-2.$$

Demak, izlanayotgan urinmaning tenglamasi

$$y-(-1)=-2(x-1),\ \text{ya`ni}\ 2x+y-1=0,$$

normalning tenglamasi esa

$$y+1=\frac{1}{2}(x-1),\ \text{ya`ni}\ x-2y-3=0$$

bo`ladi. ►

Misol. Bo`shliqda erkin tushayotgan jism $S=\frac{gt^2}{2}$ qonun bo`yicha harakatlanadi, bunda g $\left(g\approx 980\,{}^{см}\!/\!_{сек^2}\right)$ erkin tushayotgan jismning tezlanishi. $t=10\,сек$ da harakat tezligi topilsin.

◄Ravshanki, bu masala $S'(10)$ni topish bilan hal bo`ladi.

Hosila ta`rifiga ko`ra

$$S'(10)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(10+\Delta t)-S(10)}{\Delta t}$$

bo`ladi. Bu tenglikdagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(10+\Delta t)-S(10)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g\cdot(10+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g\cdot 10^2}{\Delta t}=\frac{g}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t\cdot(20+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{g}{2}\cdot 20=10g.$$

Demak, harakatning $t=10\ сек$ momentdagi tezligi

$$S'(10)=10\cdot g\approx 10сек\cdot 980\frac{см}{сек^2}=9800\frac{см}{сек}=98\,{}^{м}\!/\!_{сек}$$

bo`ladi. ►

Hosila hisoblashning sodda qoidalari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo`lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo`lsin. U holda:

1) $y=c\cdot f(x)$ bo`lsa, $y'=c\cdot f'(x)$ bo`ladi, $c-const$;

2) $y=f(x)\pm g(x)$ bo`lsa, $y'=\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$ bo`ladi;

3) $y=f(x)\cdot g(x)$ bo`lsa, $y'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)\pm f(x)\cdot g'(x)$ bo`ladi;

4) $y=\frac{f(x)}{g(x)},\ \ (g(x)\neq 0)$ bo`lsa, $y=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ bo`ladi;

5) $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ lar yordamida tuzilgan $y=f(\varphi(x))$ funksiyaning hosilasi $y'=f'(u)\cdot u'(x)=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ bo`ladi;

6) Agar $y=f\left(x\right)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x=\varphi\left(y\right)$ bo`lsa,

$\varphi'\left(y\right)=\dfrac{1}{f'\left(x\right)}$ bo`ladi;

Ko`pincha hosilalarni hisoblashda quyida keltirilgan jadvaldan foydalanish mumkin:

1) $\left(x^{a}\right)'=\alpha\cdot x^{a-1}, \qquad \left(u^{a}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$

2) $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a, \qquad \left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$

3) $\left(e^{x}\right)'=e^{x}, \qquad \left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$

4) $\left(\log_{a}x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_{a}e, \qquad \left(\log_{a}u\right)'=\dfrac{1}{u}\log_{a}e\cdot u'$

5) $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}, \qquad \left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$

6) $\left(\sin x\right)'=\cos x, \qquad \left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$

7) $\left(\cos x\right)'=-\sin x, \qquad \left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$

8) $\left(tgx\right)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}, \qquad \left(tgu\right)'=\dfrac{1}{\cos^{2}u}\cdot u'$

9) $\left(ctgx\right)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}, \qquad \left(ctgu\right)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}u}\cdot u'$

10) $\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}, \qquad \left(\arcsin u\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'$

11) $\left(\arccos x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}, \qquad \left(\arccos u\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'$

12) $\left(\mathrm{arc}\,tgx\right)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}, \qquad \left(\mathrm{arc}\,tgu\right)'=\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u',$

13) $\left(arcctgx\right)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$, $\left(arcctgu\right)'=-\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u'$

Misol. Ushbu $y=tgx+\dfrac{e^{x}}{1+x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

◀Yig`indinig hamda nisbatning hosilasini hisoblash qoidasidan hamda jadvaldan foydalanib topamiz:

$$y'=\left(tgx+\frac{e^{x}}{1+x}\right)'=\left(tgx\right)'+\left(\frac{e^{x}}{1+x}\right)'=\frac{1}{\cos^{2}x}+\frac{\left(1+x\right)\left(e^{x}\right)'-\left(1+x\right)'\left(e^{x}\right)}{\left(1+x\right)^{2}}=$$

$$=\frac{1}{\cos^{2}x}+\frac{\left(1+x\right)e^{x}-e^{x}}{\left(1+x\right)^{2}}=\frac{1}{\cos^{2}x}+\frac{xe^{x}}{\left(1+x\right)^{2}}.\ ▶$$

Mavzuga doir misol va masalalar

1. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = x\ln x$; 2) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; 3) $y = \lg(5x)$.

4) $y = \ln x - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$; 5) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; 6) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

7) $y = \ln(1+\cos x)$; 8) $y = \ln\sin x - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

9) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$; 10) $y = \ln\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; 11) $y = \lg(5x+3)$.

12) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; 13) $y = \ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax}}$; 14) $y = \ln(tgx)$.

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$; 2) $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$.

3) $y = x - arctgx$; 4) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$.

5) $y = arctg\dfrac{x}{a}$; 6) $y = \arccos(1-2x)$.

7) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arccos x$; 8) $y = \arcsin(e^{3x})$.

9) $y = xarctgx + \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 10) $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

11) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 12) $y = arctg\sqrt{6x-1}$.

13). $y = x\arccos(1-x^2)$; 14) $y = arctgx - \dfrac{1}{x}$.

15) $y = \arccos\sqrt{1-3x} + \sqrt{2x-4x^2}$;

3. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = tgx$; 3) $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyalarning 2-tartibli hosilalari topilsin.

4. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = x\sin x$ funksiyalarning 3-tartibli hosilalari topilsin.

5. 1) $y = x\ln x$; 2) $y = te^{-t}$; 3) $y = arctg\dfrac{x}{a}$ funksiyalarning 3-tartibli hosilalari topilsin.

6. 1) $y = \ln x$; 2) $y = e^{-\frac{x}{a}}$; 3) $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalari topilsin.

7. 1) $y = x^n$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \cos^2 x$ funksiyalarning n-tartibli hosilalari topilsin.

ANIQMAS INTEGRALLARNI HISOBLASHGA DOIR MISOLLAR YECHISH

ANIQMAS INTEGRALLARNI HISOBLASHGA DOIR MISOLLAR YECHISH

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga funksiyalar hosilalarini hisoblash, hosilani hisoblash qoidalarini bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Ma`lumki matematikada amallar juft-juft bo`lib uchrab keladi. Jumladan, qo`shish va ayirish, ko`paytirish va bo`lish, darajaga ko`tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensialash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug`iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo`lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to`g`ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo`lsin. Ma`lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning **boshlang`ich (dastlabki) funksiyasi** deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlang`ich funksiyasi, $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$ bo`ladi, chunki $F'(x) = (\dfrac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ bo`ladi.

Aniqmas integral va uning xossalari

$F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, $F(x)+C$ (bunda C ixtiyoriy o`zgarmas) funksiyalar to`plami shu oraliqda $f(x)$ **funksiyaning aniqmas integrali** deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o`zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang`ich funksiyalari to`plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas integralning xossalari:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya`ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad ва \qquad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o`zgarmasning yig`indisiga teng, ya`ni

$$f'(x)dx = f(x) + C \qquad ва \qquad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta`rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo`ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o`quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o`zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) o`zgarmas ko`paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya`ni $K = const \neq 0$ bo`lsa,

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig`indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig`indisiga teng, ya`ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)\,dx.$$

Asosiy integrallar jadvali

Berilgan funksiyaga asosan uning boshlang`ichini topish, berilgan funksiyani differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiyalarning, yig`indining, ko`paytmaning, bo`linmaning hamda murakkab funksiyalarning hosilasini topishni o`rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiyalarni integrallashda esa differensiallashdagidek umumiy qoidalar yo`q. Masalan, ikkita elementar funksiyalar boshlang`ichlarining ma`lum bo`lishiga qaramasdan, ular ko`paytmasining, bo`linmasining boshlang`ichini topishda aniq bir qoida yo`q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to`g`ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo`ladi. Funksiyani integrallash ya`ni boshlang`ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko`rsatadiki, ular yordamida ko`p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi **asosiy integrallar jadvalini** yoddan bilish zarur.

$$1)\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1;\quad 2)\ \int dx = x + C;\quad 3)\ \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$4)\ \int \sin x dx = -\cos x + C;\quad 5)\ \int \cos x dx = \sin x + C;\quad 6)\ \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1);\quad 8)\ \int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C;$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;\quad 10)\ \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C;$$

$$\int$$

$$11)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C;\quad 12)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C,\ \ a \neq 0;$$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln x + \sqrt{x^2 - k} + C.$$

Bu formulalarning to`g`riligini, tekshirish tengliklarning o`ng tomonidagi ifodalar differensiali integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko`rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1}dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$$\int (x^3+5\sin x-9)dx = \int x^3\ dx + 5\int \sin x\,dx - 9\int dx$$

bo`ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4}+C_1,\ 5\int \sin xdx = 5(-\cos x + C_2),\ \ -9\int dx = -9(x+C_3).$$

Demak,

$$\int (x^3+5\sin x-9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + (C_1+5C_2-9C_3)\,.$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o`zining ixtiyoriy o`zgarmasini qo`shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o`zgarmasni qo`shamiz, chunki $C_1, C_2, C_3$ ixtiyoriy o`zgarmaslar bo`lsa,

$C = C_1+5C_2-9C_3$ ham ixtiyoriy o`zgarmas bo`ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3+5\sin x-9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + C\,.$$

Integralning to`g`ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o`ng tomonini differensiallash bilan ko`rsatish mumkin (buni bajarishni o`quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int x^{\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C$$

bo`ladi.

Misol. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) hossalaridan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int \frac{3dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = 3\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = 3\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + 3\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = 3(tgx - ctgx) + C.$$

Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish: Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

O`zgaruvchini almashtirish

Ko`p hollarda yangi o`zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x)=t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o`zgaruvchi bo`lib, o`zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$$

ko`rinishda bo`ladi.

O`zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int(3x+1)^7dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x+1=t$ deb $3dx=dt$ yoki $dx=\dfrac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int(3x+1)^7dx=\int t^7\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{t^8}{24}+C=\frac{(3x+1)^8}{24}+C$$

bo`ladi.

2-misol. $\int\sqrt[3]{1+x^2}\,x\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1+x^2=t$ o`zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2xdx=dt$ yoki $xdx=\dfrac{dt}{2}$ bo`lib,

$$\int\sqrt[3]{1+x^2}\cdot xdx=\int\sqrt[3]{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}t\sqrt[3]{t}+C=\frac{3}{8}(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2}+C$$ bo`ladi.

3-misol. $\int\cos mxdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx=\dfrac{1}{m}d(mx)$ o`zgartirish olib,

$$\int\cos mxdx=\frac{1}{m}\int\cos mxd(mx)=\frac{1}{m}\sin mx+C$$

natijaga ega bo`lamiz. Bunday integrallashga **bevosita integrallash** deb ataladi. Chunki $mx=t$ bilan o`zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o`zgaruvchini almashtirib o`tirmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int(\ln x)^3\dfrac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x=t$ bilan yangi o`zgaruvchini almashtirib, $\dfrac{dx}{x}=dt$

ekanligini hisobga olsak,

$$\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}=\int t^3\cdot dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{(\ln x)^4}{4}+C$$

bo`ladi.

5-misol. $\int\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ bilan yangi o`zgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differensial topib, $dx=2tdt$ bo`lganligi uchun,

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin t}{t}2tdt=2\int\sin tdt=-2\cos t+C=-2\cos\sqrt{x}+C$$

bo`ladi. —

6-misol. $\int e^{\sin x}\cdot\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos xdx=d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x}\cdot\cos xdx=\int e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}+C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$xdx=\frac{1}{2}d(x^2),\ \ \cos xdx=d(\sin x),\ \ \frac{dx}{x}=d(\ln x),\ \ dx=\frac{1}{a}(ax+b),\ ....$$

tengliklardan foydalanib, o`zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

**2. Bo`laklab integrallash.** Bo`laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko`paytmasi differensiali formulasiga asoslangan.

Ma`lumki, $d(uv)=udv+vdu,$ bundan $udv=d(uv)-vdu.$ Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu=uv-\int vdu$$

natijaga ega bo`lamiz. Shunday qilib,

$$\int udv=uv-\int vdu \quad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga **bo`laklab integrallash** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int udv$ integraldan ikkinchi $\int vdu$ integralga o`tiladi. Demak, bo`laklab integrallashni qo`llash natijasida hosil bo`lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo`lgandagina bu usulni qo`llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko`paytuvchilarga qulay bo`laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo`ladi. $du$ ni topish uchun $u$ ning differensiali topilib, $v$ ni topish uchun esa $dv$ ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o`zgarmas C ga bog`liq bo`lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C=0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differensiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo`lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo`lishi kerak.

Bo`laklab integrallash formulasi ko`proq:

$$1)\int p(x)e^{ax}dx,\ \int p(x)\sin mxdx,\ \int p(x)\cos axdx \quad \textit{ва}$$

$$2)\ \int p(x)\ln xdx,\int p(x)\arcsin xdx,\int p(x)\arccos xdx,\int p(x)arctgxdx,\ \int p(x)arcctgxdx$$

(bularda $p(x)$ biror darajali ko`phad) ko`rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko`phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda

$\ln x, \arcsin x, \arccos x,\ \ arctgx,\ \ arcctgx$ lar,

qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo`laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int x\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u=x,\ dv=\cos xdx$ deb

Bo`laklasak, $du=dx,\ \ v=\int\cos xdx=\sin x$ bo`lib, (1) formulaga asosan,

$$\int \underset{u}{x}\underset{dv}{\cos xdx}=\underset{u}{x}\underset{v}{\sin x}-\int \underset{v}{\sin x}\underset{du}{dx}=x\sin x+\cos x+C$$

natijaga ega bo`lamiz.

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int\sin x\,dx$ hosil bo`ldi, bu jadval integrali bo`lganligi uchun osongina topildi.

2-misol. $\int x^2e^{3x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u = x^2,\ dv = e^{3x}dx$ ko`rinishda bo`laklab olsak,

$$du = 2xdx,\quad v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

hosil bo`ladi. (1) formulaga asosan

$$\int x^2e^{3x}dx = x^2\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2xdx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

bo`ladi. Oxirgi hosil bo`lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo`laymiz.

$$\int xe^{3x}dx = \left|\begin{array}{l} u = x,\quad du = dx \\ dv = e^{3x},\ v = \frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right| =$$

$$= x\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C_1 = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1.$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1\right] = \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$$

hosil bo`ladi.

3-misol. $\int x^3\cos 2xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek emas, teskarisini ya`ni $u = \cos 2x,\ dv = x^3dx$ bo`laklab olaylik; bu holda

$du = -2\sin 2xdx,\quad v = \dfrac{x^4}{4}$ bo`lib (1) formuladan foydalangandan

keyin

$$\int x^3\cos 2xdx = \cos 2x\cdot\frac{x^4}{4} + \int\frac{x^4}{4}\cdot 2\sin 2xdx = -\frac{x^4}{4}\cos 2x +$$

$$+\frac{1}{2}\int x^4\sin 2x\,dx$$

ifoda hosil bo`ladi. Keyingi $\int x^4\sin 2xdx$ integral berilgan $\int x^3\cos 2xdx$ integralga nisbatan murakkabroqdir($x$ ning darajasi bittaga ortdi). Demak, bunday bo`laklab olish maqsadga muvofiq emas, ya`ni $u = x^3,\ dv = \cos 2xdx$ deb olish kerak edi. (Bu integralni hisoblashni o`quvchiga havola qilamiz).

4-misol. $\int \arccos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \arccos x dx = \left| \begin{matrix} u = \arccos x, & du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}dx} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x\arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = x\arccos x + \int \frac{-\dfrac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x\arccos x - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \text{Bu}$$

$$+C = x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

integralda bir marta bo`laklab integrallangandan keyingi hosil bo`lgan integralda o`zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integralladik. Integrallash usullarini qo`llashda o`zgaruvchini almashtirganda yoki bo`laklab integrallaganda yozuvda tartib bo`lishi uchun yuqoridagi integralni hisoblangandagidek yozishga odat qilishni tavsiya etiladi.

5-misol. $J = \int e^x \cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo`laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = \cos x, \ du = -\sin xdx \\ dv = e^x dx, \ v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin xdx,$$

hosil bo`ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o`xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo`laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo`llash bilan quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\int e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = \sin x, & du = \cos xdx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos xdx$$

Shunday qilib,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo`lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \qquad \text{ёки} \qquad J = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

natijaga ega bo`lamiz.

Mavzuga doir misol va masalalar

1. $\int \frac{5x^8+6}{x^4}dx$; 2. $\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)dx$; 3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)dx$ 4. $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+3dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

5. $\int e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$; 6. $\int \left(5^x + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x}} \right)dx$; 7. $\int \frac{5+3tg^2 x}{\sin^2 x}dx$; 8. $\int \left(\frac{4}{9+x^2} - \frac{5}{\sqrt{4-x^2}} \right)dx$

9. $\int \frac{dx}{x^2-49}$; 10. $\int \frac{dx}{x^2+16}$; 11. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2+3}} \right)dx$; 12. $\int \left(\frac{7}{x^2+7} - \frac{6}{x^2-3} \right)dx$.

1. a) $\int x^5dx$, b) $\int \frac{x^6}{6}dx$, c) $\int \frac{2}{x^3}dx$ 2. a) $\int \sqrt{x}dx$, b) $\int \sqrt[5]{x}dx$, c) $\int \sqrt[6]{x^5}dx$

3. a) $\int (x-1)(x+1)dx$, b) $\int (\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)dx$

4. a) $\int (3x^2-3x+1)dx$, b) $\int (x^4-\frac{1}{3}x^2+x+1)dx$

5. a) $\int (x^2+1)^2dx$, b) $\int (x+1)(x-1)^2dx$ 6. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[10]{x}}$, b) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

7. a) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$, b) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx$ 8. a) $\int \frac{(x\sqrt{x}-3)^2}{x^3}dx$, b) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

1. $\int \sin 3xdx$. 2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5}dx$.

3. $\int e^{-x^3}x^2dx$. 4. $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$. 5. $\int (e^x+e^{-\frac{x}{2}})dx$. 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

7. $\int (5-2x)^9dx$. 8. $\int \sqrt[3]{7-3x}dx$. 9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}}dx$. 10. $\int \cos(1-3x)dx$.

11. $\int \sin(5x+7)dx$. 12. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. 13. $\int 3^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. 14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

15. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x}dx$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$. 17. $\int x^2\sin xdx$. 18. $\int x\ln xdx$. 19. $\int arctgxdx$.

20. $\int \arcsin xdx$. 21. $\int x^2e^{2x}dx$. 22. $\int e^x\sin xdx$. 23. $\int (x+3)\sin xdx$.

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Aniq integralning geometrik ma`nosini ko`rsating.

A) egri chiziqli trapetsiyaning og`ma tomoning burchak koeffitsiyenti;
B) egri chiziqli trapetsiyaning perimetri ;
C) egri chiziqli trapetsiyaning o`rta chizig`i uzunligi ;
D) egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi ;
E) to`g`ri javob keltirilmagan.

2. Aniq integralning mexanik ma`nosini ko`rsating.

A) o`zgaruvchi kuchning eng katta qiymati;
B) o`zgaruvchi kuchning eng kichik qiymati;
C) o`zgaruvchi kuchning momenti;
D) o`zgaruvchi kuchning bajargan ish;
E) o`zgaruvchi kuchning o`rta qiymati.

3. Aniq integralning iqtisodiy ma`nosini ko`rsating.

A) mahsulot ishlab chiqarishda mehnat unumdorligi;
B) ishlab chiqarilgan mahsulot tannarxi;
C) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi;
D) ishlab chiqarilgan mahsulot chakana narxi;
E) mahsulot ishlab chiqarishda sarflangan xomashyo.

4. [a, b] kesma bo`yicha y=f(x) funksiya uchun $S_n(f)$ integral yig`indi tuzishda quyidagi amallardan qaysi biri bajarilmaydi?

A) [a, b] kesma x_i (i=1, 2, ···, n–1) va $x_0=a$, $x_n=b$ nuqtalar bilan n bo`lakka ajratiladi;

B) $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ⋯, n) kesmalardan ξ_i nuqtalar olinadi;
C) tanlangan ξ_i nuqtalarda f(x) funksiya qiymatlari hisoblanadi;
D) $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ⋯, n) kesmalarning uzunliklari $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ topiladi;
E) ko`rsatilgan barcha amallar bajariladi .

5. [a, b] kesmada aniqlangan y=f(x) funksiya uchun tuzilgan

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

integral yig`indi orqali uning aniq integral qanday aniqlanadi?

A) $\int_a^b f(x)dx = S_n(f)$; B) $\int_a^b f(x)dx = \max S_n(f)$; C) $\int_a^b f(x)dx = \min S_n(f)$;

D) $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ \max \Delta x \to 0}} S_n(f)$; E) to`g`ri javob keltirilmagan.

6. [a, b] kesmada aniqlangan y=f(x) funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral qanday shartda doimo mavjud bo`ladi?

A) yuqoridan chegaralangan;
B) quyidan chegaralangan;
C) o`suvchi;
D) kamayuvchi;
E) uzluksiz.

7. Aniq integralning xossasi qayerda xato ko`rsatilgan?

A) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

B) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;

C) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$;

D) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \; (k - const.)$;

E) barcha qoidalar to`g`ri ko`rsatilgan.

8. Aniq integral xossasini ifodalovchi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik bajarilishi uchun c nuqta qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

A) c< a; B) c> b; C) c=a yoki c=b; D) a< c<b;

E) ko`rsatilgan barcha shartlarda tenglik bajariladi .

ANIQ INTEGRALLARNI HISOBLASHGA DOIR MISOLLAR YECHISH

ANIQ INTEGRALLARNI HISOBLASHGA DOIR MISOLLAR YECHISH

**Amaliy mashg`ulot maqsadi.** Talabalarga aniq integrallarni hisoblashga doir misollar yechish bajarishda bilim, malaka va ko`nikmalarini shakllantirish.

Aniq integral va uning xossalari

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan va chegaralangan bo`lsin. Bu segmentni

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad (x_0=a, \quad x_n=b, \quad x_0<x_1<\ldots<x_n)$$

nuqtalar yordamida n ta

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_k,x_{k+1}],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

bo`lakka ajratib, har bir bo`lakda ixtiyoriy ravishda bittadan

$$\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_k,\ldots,\xi_{n-1} \qquad (\xi_k\in[x_k,x_{k+1}], k=0,1,\ldots,n-1)$$

nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalardagi funksiyalarning qiymatlari

$$f(\xi_0), f(\xi_1),\ldots, f(\xi_k),\ldots, f(\xi_{n-1})$$

ni mos bo`lakchalar uzunliklari

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0 \qquad (x_0=a),$$
$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1} \qquad (x_n=b)$$

ga ko`paytirib, quyidagi

$$\sigma = f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_k)\cdot\Delta x_k + \\ +\ldots + f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (1)$$

yig`indini tuzamiz.
(1) yig`indi integral yig`indi deyiladi.
Integral yig`indi σ ning

$$\max_k \Delta x_k \to 0$$

dagi limiti mavjud bo`lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi, limitning qiymati esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ bo`yicha aniq integrali deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_k \Delta x_k\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda

1) uzluksiz bo`lsa,

2) $\left[a,b\right]$ segmentning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega va qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo`lsa, u $\left[a,b\right]$ da integrallanuvchi bo`ladi.

Aniq integral quyidagicha xossalarga ega:

1) $\int\limits_a^a f\left(x\right)=0,$

2) $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=-\int\limits_b^a f\left(x\right)dx,$

3) $\int\limits_a^b c\cdot f\left(x\right)dx=c\cdot\int\limits_a^b f\left(x\right)dx,\quad c=const,$

4) $\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx+\int\limits_a^b g\left(x\right)dx,$

5) $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx,\qquad\left(a<c<b\right).$

Misol. Ushbu

$$\int\limits_a^b c\cdot dx=c\cdot\left(b-a\right)\ (\,f\left(x\right)=c-const\,)$$

tenglik isbotlansin.

◀Bu tenglikni aniq integral ta`rifidan foydalanib hisoblaymiz.

$\left[a,b\right]$ segmentni ixtiyoriy ravishda n ta

$$\left[x_0,x_1\right],\left[x_1,x_2\right],...,\left[x_k,x_{k+1}\right],...,\left[x_{n-1},x_n\right]\ \left(x_0=a,x_n=b,\right)$$

bo`lakka bo`lib, har bir bo`lakda ixtiyoriy

$$\xi_0,\xi_1,\xi_2...,\xi_k,...,\xi_{n-1}$$

nuqtalarni olib $f\left(x\right)=c$ funksiyaning integral yig`indisini hisoblaymiz.

$$\sigma=f\left(\xi_0\right)\cdot\Delta x_0+f\left(\xi_1\right)\cdot\Delta x_1+f\left(\xi_2\right)\cdot\Delta x_2+...+f\left(\xi_k\right)\cdot\Delta x_k+...+f\left(\xi_{n-1}\right)\cdot\Delta x_{n-1}=$$

Ravshanki,

$$f\left(\xi_k\right)=c,\qquad\Delta x_k=x_{k+1}-x_k,\qquad\left(k=0,1,2,...,n-1\right)$$

Bu tengliklarni e`tiborga olib topamiz

$$\sigma=c\cdot\Delta x_0+c\cdot\Delta x_1+c\cdot\Delta x_2+...+c\cdot\Delta x_k+...+c\cdot\Delta x_{n-1}=$$
$$=c\left(\Delta x_0+\Delta x_1+\Delta x_2+...+\Delta x_k+...+\Delta x_{n-1}\right)=$$
$$=c\left(x_1-a+x_2-x_1+x_3-x_2+...+x_{k+1}-x_k+...+b-x_{n-1}\right)=$$
$$=c\cdot\left(b-a\right).$$

Undan

$$\lim_{\max\Delta x_k\to0}\sigma=\lim_{\max\Delta x_k\to0}c\cdot\left(b-a\right)=c\cdot\left(b-a\right)$$

bo`lishi kelib chiqadi. Ta`rifga binoan

$$\int_a^b c \cdot dx = c \cdot (b-a)$$

bo`ladi.▶

Aniq integralni hisoblash usullari

Aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo`lib, $F(x)$ esa uning boshlang`ich funksiyasi bo`lsin ($F'(x) = f(x)$). Unda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \quad (2)$$

bo`ladi. (2) formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi. Uning yordamida aniq integrallar hisoblanadi.

Misol. Ushbu.

$$\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralni aniq integral xossalari hamda Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib topamiz.

$$\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = [x]_0^4 + 4\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}d\left(\frac{x}{4}\right) = 4 + 4\left[e^{\frac{x}{4}}\right]_0^4 = 4e.$$ ▶

Aniq integrallarni o`zgaruvchini almashtirish usuli bilan hisoblash.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz, $x = \varphi(t)$ funksiya esa $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz, uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega va $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$ bo`lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (3)$$

bo`ladi. (3) formula aniq integrallarda o`zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Misol. Ushbu.

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralni o`zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib hisoblaymiz.

Berilgan integralda

$$\sqrt{1+x^2} = t \text{ ya`ni } x = \sqrt{t^2-1}$$

deylik. Unda

$$x = 0 \text{ da } t = 1$$
$$x = 1 \text{ da } t = \sqrt{2}$$

bo`lib,

$$dx=\left(\sqrt{t^2}-1\right)'\cdot dt=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

bo`ladi. Natijada berilgan integral quyidagi ko`rinishga keladi:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt$$

Nyuton-Leybnits formulasiga ko`ra

$$\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

bo`lib,

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

bo`ladi.►

Aniq integrallarni bo`laklab integrallash usuli yordamida hisoblash.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ segmentda uzluksiz hamda uzluksiz $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo`lsa,

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx \quad (4)$$

bo`ladi. (4) formula aniq integrallarda bo`laklab integrallash formulasi deyilib, uni quyidagicha

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x)$$

ham yozish mumkin.

Misol. Ushbu

$$\int_1^2 x\log_2 xdx$$

integral hisoblansin.

◄Bu integralni bo`laklab integrallash usulidan foydalanib hisoblaymiz. Berilgan integral ostidagi $x\log_2 xdx$ ifodada

$$u=\log_2 x,\quad dv=xdx$$

deymiz. Unda

$$du=\frac{1}{x\ln 2}dx,\quad v==\frac{x^2}{2}$$

bo`lib, bo`laklab integrallash formulasiga ko`ra

$$\int_1^2 x\log_2 xdx=\frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{xdx}{2\ln 2}.$$

bo`ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2=\frac{1}{2}\cdot 4\log_2 2-\frac{1}{2}\cdot 1\log_2 1=2,$$

$$\int_1^2\frac{xdx}{2\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{2\ln 2}\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4\ln 2}.$$

Demak,

$$\int_1^2 x\log_2 xdx=2-\frac{3}{4\ln 2}.$$ ►

Misol. Aniqmas integrallarni hisoblang.

a) $\int\frac{8x-arctg 2x}{1+4x^2}dx$; b) $\int\ln\left(4x^2+1\right)dx$;

v) $\int\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

Yechish: a) Bunday integralda integrallash qoidalaridan foydalanib jadvaldagi integralga keltiriladi.

$$\int\frac{8x-arctg 2x}{1+4x^2}dx=\int\frac{8x}{1+4x^2}dx-\int\frac{arctg 2x}{1+4x^2}dx=\int\frac{d\left(1+4x^2\right)}{1+4x^2}+\int arctg 2xd(arctg 2x)=$$

$$=\ln\left|1+4x^2\right|-\frac{1}{2}arctg^2 2x+C.$$

b) Bo`laklab integrallash formulasidan foydalanamiz: $\int udv=uv-\int vdu$

$$\int\ln(4x^2+1)dx=\begin{vmatrix}u=\ln(4x^2+1) & dv=dx\\ du=\dfrac{8x}{4x^2+1} & v=x\end{vmatrix}=x\ln(4x^2+1)-8\int\frac{x^2}{4x^2+1}dx=$$

$$=x\ln(4x^2+1)-2\int\left(1-\frac{1}{4x^2+1}\right)dx=x\ln(4x^2+1)-2\left(x-\frac{1}{2}arctg 2x\right)+C=.$$

$$=x\ln(4x^2+1)+arctg 2x-2x+C.$$

v) $\int\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$ Integral ostidagi $\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}$ kasrni sodda kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{A(x+2)^3+B(x+1)(x+2)^2+C(x+1)(x+2)+D(x+1)}{(x+1)(x+2)^3}.$$

$$A(x+2)^3+B(x+1)(x+2)^2+C(x+1)(x+2)+D(x+1)=x^3+6x^2+13x+9$$

O`rniga qo`yish usuli: $x=-1$ da, $A=1;$

$x=-2$ da, $-D=-1\Rightarrow D=1;$

Noma`lum koeffitsiyentlar usuli:

$$x^3:\ A+B=1\Rightarrow B=0;$$

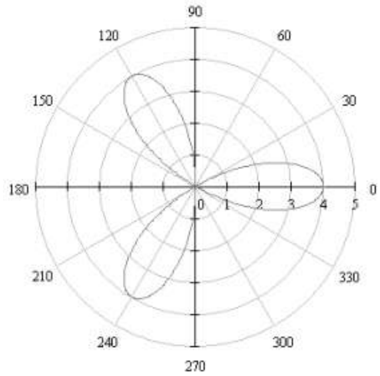
$$x^0:\ 8A+4B+2C+D=9\Rightarrow C=0;$$

Bundan, $\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+2)^3}\right)dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+2)^2}+C.$

Misol. Qutb koordinatasida berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang: $r=4\cos 3\varphi$.

Yechish: $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi,$ $\begin{matrix}4\cos 3\varphi\geq 0,\\ \cos 3\varphi\geq 0.\end{matrix}$

Bundan, $\begin{matrix}-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 3\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\\ -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z,\end{matrix}$



$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{0}16\cos^2 3\varphi d\varphi=24\int_{-\pi/6}^{0}(1+\cos 6\varphi)d\varphi=24(\varphi+\frac{1}{6}\sin 6\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=$$

$$=24(0+0+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\cdot 0)=4\pi.$$

Misol. Parametrik tenglama orqali berilgan chiziqning yoy uzunligini hisoblang.

$$\begin{cases}x=4(\cos t+t\sin t),\\ y=4(\sin t-t\cos t),\end{cases}$$
$$0\leq t\leq 2.$$

Yechish:

$$x'=4(-\sin t+\sin t+t\cos t)=4t\cos t,$$
$$y'=4(\cos t-\cos t+t\sin t)=4t\sin t.$$

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt,$$

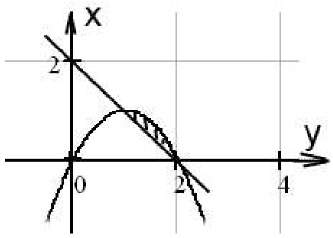
$$l=\int_0^2\sqrt{16t^2\cos^2 t+16t^2\sin^2 t}dt=\int_0^2 4tdt=2t^2\Big|_0^2=2\cdot 2^2=8.$$

Misol. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuraning Ox o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jism hajmini toping.

$$y=2x-x^2,\ y=-x+2.$$

Yechish: Berilgan funksiyalar kesishish nuqtalarini topamiz:

$$2x-x^2=2-x; \quad x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=2.$$



$$V=\pi\int_a^b y^2dx.$$

$$V=\pi\int_1^2\left((2x-x^2)^2-(2-x)^2\right)dx=\pi\int_1^2(x^4-4x^3+4x^2-x^2+4x-4)dx=$$

$$=\pi\int_1^2(x^4-4x^3+3x^2+4x-4)dx=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-x^4+x^3+2x^2-4x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\pi\left(\frac{32}{5}-16+8+8-8-\frac{1}{5}+1-1-2+4\right)=\frac{\pi}{5}.$$

Mavzuga doir misol va masalalar

Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib quyidagi integrallar topilsin:

1. a) $\int_1^4 x^2dx$ b) $\int_0^{36}\sqrt{x}dx$ (Javob: a) 21, b) 144)

2. a) $\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx$ b) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{2}{x^4}dx$ (Javob: a) $\frac{3}{4}$, b) $24\frac{2}{3}$)

3. a) $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ b) $\int_1^3 \frac{|x|}{x}dx$ (Javob: a) $4{,}5$, b) 2)

4. a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ (Javob: a) $\frac{1}{2}$, b) 1)

O`zgaruvchilarini almashtirish usulidan foydalanib quyidagi aniq integrallar hisoblansin:

1. $\int_{-2}^{5}\sqrt[3]{5x+2}dx$ (Javob: $9{,}75$)

2. $\int_1^4 \frac{1}{(1+2x)^2}dx$ (Javob: $\frac{1}{9}$)

3. $\int_0^1 (x^3-1)^2\cdot x^2dx$ (Javob: $\frac{1}{9}$)

4. $\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1-4x^3}dx$ (Javob: $\frac{1}{12}\ln 5$)

5. $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x}dx$ (Javob: $\frac{\pi}{6\ln 3}$)

6. $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{8x}{\sin^2 x^2}dx$ (Javob: $4(\sqrt{3}-1)$)

7. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ (Javob: $2\sqrt{3}-2-\frac{\pi}{6}$)

Bo`laklab integrallash usulidan foydalanib quyidagi aniq integrallar hisoblansin:

1. $\int_0^{\pi} x\cos x dx$ (Javob: -2)

2. $\int_0^{\pi} x\sin x dx$ (Javob: π)

3. $\int_0^{5} xe^x dx$ (Javob: $4e^5+1$)

4. $\int_1^{e} \ln x dx$ (Javob: 1)

5. $\int_0^{2\pi} x\sin 2x dx$ (Javob: $-\pi$)

Mavzuga oid testlar to`plami

1. Agar *y=F*(*x*) berilgan [*a*,*b*] kesmada *y=f*(*x*) funksiyaning boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, unda aniq integral uchun Nyuton–Leybnits formulasi qayerda to`g`ri ifodalangan?

A) $\int_a^b f(x)dx = F(x)$; B) $\int_a^b f(x)dx = F(a)\cdot F(b)$; C) $\int_a^b f(x)dx = F(b)/F(a)$;

D) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; E) $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$.

2. $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) π/2; C) π/3; D) π/4; E) π/6.

3. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) π/2; C) π/3; D) π/4; E) π/6.

4. Aniq integralni bo`laklab integrallash formulasini ko`rsating.

A) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$; B) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int_a^b vdu$; C) $\int_a^b udv = \int_a^b vdu$;

D) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b$; E) To`g`ri javob ko`rsatilmagan.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasi bo`yicha hisoblang:

a) $\int_0^1 [nx^{n-1} + (n+1)x - 2n]dx$; *b*) $\int_0^{\pi} [\sin(2n+1)x + n\cos 2nx]dx$.

2. Quyidagi aniq integrallarni bo`laklab integrallash usulida hisoblang:

a) $\int_0^1 xe^{nx}dx$; *b*) $\int_1^e x^n \ln x dx$; *c*) $\int_0^{\pi} e^{nx}\cos(n+1)xdx$.

3. Quyidagi aniq integrallarni o`zgaruvchilarni almashtirish yordamida hisoblang:

a) $\int_0^n \frac{x+n}{\sqrt{n^2+3nx}}dx$; *b*) $\int_{01}^n \frac{\sqrt{5nx+4n^2}}{x}dx$; *c*) $\int_{1/n}^1 \frac{dx}{x\sqrt{n^2x^2+1}}$

GLOSSARIY

Termin	O`zbek tilidagi sharhi	Rus tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Aksioma	(yun. axioma) — o`z-o`zidan ravshanligi, ayonligi sababli is-botsiz qabul qilinadigan holat, tasdiq, fikr. Deduktiv quriladigan ilmiy nazariyalarda asosiy tushunchalarning boshlang`ich xossalari. Aksiomalar tizimi bilan kiritiladi va boshqa hamma xossalar, tasdiqlar (teoremalar) ulardan foyda-lanib mantiqiy isbot qilinadi. Ayniyat qonuni, ziddiyat qonuni, uchinchi istisno qonuni mantiqiy aksioma hisoblanadi	(др.-греч. ξίωμα — утверждение, положение), постула́т — исходное положение какой-либо теории, принимаемое в рамках данной теории истинним без требования доказателства и исползуемое при доказателстве других её положений, которие, в свою очеред, називаются теоремами	an axiom or postulate as defined in classic philosophy, is a statement (in mathematics often shown in symbolic form) that is so evident or well-established, that it is accepted without controversy or question. Thus, the axiom can be used as the premise or starting point for further reasoning or arguments, usually in logic or in mathematics.[1] The word comes from the Greek axíōma (ἀξίωμα) `that which is thought worthy or fit` or `that which commends itself as evident
Algebra (aljabr)	(arab. الجبر "Al-Jabr") — matematikaning bir sohasi. Algebraning asosiy masalasi - to‘plamlarda kiritilgan matematik amallarni o‘rganish. Shunday matematik amallar borki, ular butunlay arifmetik amallarga o‘xshamaydi (mas., o‘rin almashtirish yoki assotsiativlik qonuniga bo‘ysunmaydigan amallar mavjud). Arifmetikadan tayin sonlar ustida birinchi to‘rt amal o‘rganiladi. Algebrada esa bu amallarning har qanday son va son bo‘lmagan boshqa matematik	(от араб. الجبر , «ал-джабр» — восполнение) — раздел математики, котоий можно грубо охарактеризоват как обобшение и расширение арифметики. Слово «алгебра» также употребляется в названиях различних алгебраических систем. В более широком смисле под алгеброй понимают раздел математики, посвяшённий изучению операций над элементами множества	(from Arabic الجبر "al-jabr" meaning "reunion of broken parts") is one of the broad parts of mathematics, together with number theory, geometry and analysis. In its most general form, algebra is the study of mathematical symbols and the rules for manipulating these symbols; it is a unifying thread of almost all of mathematics. As such, it includes everything from elementary equation solving to the study of abstractions such as groups, rings, and fields. The more basic parts of algebra

	ob`ektlar uchun o'rinli umumiy xossalari tekshiriladi. Bunday hosil qilinadigan natijalarning umumiy bo'lishiga erishish uchun miqdorlarning qiymatlari harflar bilan belgilaninib, harfiy ifodalar ustida bajariladigan amallarning qoida va qonunlari ko'rsatiladi, ifodalar shaklini o'zgartirish va tenglamalarni yechish qoidalari o'rganiladi.	произволной природи, обобшаюший обичние операции сложения и умножения чисел	are called elementary algebra, the more abstract parts are called abstract algebra or modern algebra. Elementary algebra is generally considered to be essential for any study of mathematics, science, or engineering, as well as such applications as medicine and economics.
Chiziqli algebra	Chiziqli algebra - o`rganish Vektorli, vektor yoki vektor bo`shliqlar, chiziqli o`zgarishlar va chiziqli tenglamalar tizimini algebra qismi. Chiziqli algebra ham omillaridan nazariyasini, matrix nazariyasi, shakllarini nazariyasi (masalan, kvadrat), (qismi) o`zgarmas nazariyasini, (qismi) tensor matematikadan o`z ichiga oladi. Zamonaviy chiziqli algebra vektor bo`shliqlar o`rganish aratilgan	Линейная алгебра — част алгебри, изучаюшая вектори, векторние, или линейние пространства, линейние отображения и системи линейних уравнений. К линейной алгебре также относят теорию определителей, теорию матритс, теорию форм (например, квадратичних), теорию инвариантов (частично), тензорное исчисление (частично). Современная линейная алгебра делаэт акцент на изучении векторних пространств	Linear algebra - algebra part of studying vectors, vector, or vector spaces, linear transformations and systems of linear equations. By linear algebra also include the theory of determinants, matrix theory, the theory of forms (eg, quadratic), the theory of invariants (in part), tensor calculus (in part). Modern linear algebra focuses on the study of vector spaces
Algebraik ifoda	Algebraik amallar (qo`shish, ayirish, ko`paytirish, bo`lish, butun darajaga	Алгебраическое (сложение, вичитание, умножение,	Algebraic (addition, subtraction, multiplication, division, and the level of the

	ko`tarish va butun ko`rsatkichli ildiz chiqarish) ishoralar va ehtimol, bu amallarning ketma-ket bajarilishini ko`rsatuvchi ishoralar, ya`ni qavslar bilan biriktirilib, harf va sonlardan tuzilgan ifoda.	деление, и уровен в целом и вес корен указател) и, возможно, это реализация ряда показаний, которие прикреплени кронштейни, букви и цифри заявленних.	whole and the whole root pointer) and, perhaps, this is the implementation of the series of indications that brackets are attached, letters and numbers stated.
Algebraik son	Butun ratsional koeffitsientli ko`phadning ildizi. (masalan: har qanday ratsional $\frac{p}{q}$ son algebrik sondir.	Все рационалние корни полинома коэффициентов. (Например: любая рационалная алгебра числа. $\frac{p}{q}$	All the rational roots of the polynomial coefficients. (For example: any rational algebra in number $\frac{p}{q}$.
Algoritm	Algoritm so`zi IX asrda yashagan ulug` o`zbek matematik olimi Xorazmiy ismining buzib olinishi natijasida kelib chiqqan (arabcha al Xorazmiy degani- xorazmlik degan ma`noni bildiradi yoki latinlashtirilgani Alogorithmi).	Математический алгоритм жил в девятом веке, слово великого узбекского ученого Хорезми результате нарушения имени (что означает на арабском язике Ал-Хорезми означает физическое или латинские Алогоритми).	Mathematical algorithm lived in the ninth century, the word of the great Uzbek scientist Khwarizmi result of the violation of the name (which means in Arabic al-Khwarizmi means the natural or latinlashtirilgani Alogorithmi).
Algoritm	Biror jarayonlar tizimini ma`lum tartibda bajarish haqidagi aniq qoyda (qat`iy ketma-ketlik) bo`lib, ma`lum sinfga oid masalalarni echish imkoni beradi.	Сохраняя четкое представление о виполнении заказа, системние процесси (последователности), что позволяет определенний класс задач.	Keeping clear about the execution of an order, the system processes (sequence), which allows a certain class of problems.
Analiz (tahlil)	Noma`lumdan ma`lumga, izlanayotgandan berilganga o`tish yo`li bilan fikr yuritish yoki isbotlash metodi (usuli).	Что-то думат определенним образом отказалис от поиске, или доказат, метод (метод).	Something to think a certain way given up searching for, or to prove the method (method).
Kombinatorika	matematikaning bir bo`limi bo`lib, bunda chekli to`plamlar uchun elementlarning kombinatsiya,	это раздел математики, элементи конечного множества для комбинации, такие	is a branch of mathematics, the elements of a finite set for the combination, such as o`rinlashtirish

	o`rinlashtirish, o`rin almashtirish kabi har xil birlashmalari, shuningdek barcha bu birlashmalar-ning takroriy turlari va shunga o`xshash tushunchalar o`rganiladi;	как различних ассоциаций, а также все эти типи ассоциаций во втором и аналогичних понятий изучаются;	various associations, as well as all of these types of associations in the second and similar concepts are studied;
Matritsa	ixtiyoriy tabiatli elementlardan tuzilgan to`gЪri burchakli jadval;	доброволний характер элементов в прямоуголной таблице;	the voluntary nature of the elements in a rectangular table;
Ehtimollik	Cheksiz ko`p marta takrorlanishi mumkin bo`lgan voqealar majmuida biror tayinli voqea yuz berishi imkoniyatining sonli xarakteristikasi	Неограниченное количество раз, вы можете установит определенное событие восползоваlься возможностю, чтоби указиват число характеристике	An unlimited number of times, you can set a certain event took the opportunity to mention the number xarakteris
To`plam	To`plam matematikaning boshlangЪich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Uni ixtiyoriy tabiatli narsalarning (predmetlarning) maЪlum belgilar bo`yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. To`plamni tashkil etgan narsalar uning elementlari deyiladi. Matematikada to`plamlar bosh xarflar bilan, ularning elementlari esa kichik xarflar bilan belgilanadi. Masalan, A,B,C - to`plamlar, a,b,c – to`plamning elementlari	Пакет начиная в то же время одной из самых важных понятий математики. Это доброволний характер вешей (пункт) Бренди Ассоциация (комплекс) присутствует. Коллекция объектов назиvается ее элементов. В математике, элементи их коллексии букв и маленкими буквами. Например, А, Б, С пакет, а, б, в – элементы коллекси	Package starting at the same time one of the most important concepts of mathematics. Its voluntary nature of things (the item) Brands Association (complex) is present. Collection of objects called its elements. In mathematics, the elements of their collections letters and small letters. For example, A, B, C package, a, b, c - the collections elementry
Kasr	Arifmetikada kasr birning teng qismlarining butun sonidan iborat bo`lgan	Квинт десятичной арифметики это число равно числу всех компонентов. В	Fifths decimal arithmetic is a number equal to the number of all the components.

	son. Umumiy holda kasrni $\frac{p}{q}$ ko`rinishda yozish mumkin, bunda butun p son kasrning surati, q esa uning maxraji deyiladi. P surat birlik qismlarining qancha olinganini, q maxraj birlikning qancha qismga bo`linganini ko`rsatadi	обшем случае, селое число, форма, со всей р фракцией $\frac{p}{q}$ нaзивается знаменател. p, q посмотрет фотографию, сделанние многие компоненти блока разделени единици знаменатель	$\frac{p}{q}$Photo taken many components of the unit p, q, the denominator unit is divided into several
Kvadrant	Ikki perpendikulyar koordinata o`qi hosil qilgan to`rtta to`gri burchakdan biri	Двухкоординатное ось перпендикулярна к одной из четирех под прямим углом	Two-coordinate axis is perpendicular to one of the four right angle